Superpoderes Matemáticos
para Concursos Militares
Volume 5E
2ª edição

COLÉGIO NAVAL
1991-1996

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO 2
CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS 3
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1995-1996 3
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1994/1995 9
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1993/1994 14
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1991/1992 20
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1990/1991 26
CAPÍTULO 2 32
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES 32
QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 1984 A 2016 35
CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES POR ASSUNTO 36
CAPÍTULO 3 40
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES 40
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1995/1996 40
NOTA 1: REGRA DE TRÊS 52
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1994/1995 56
NOTA 2: FÓRMULA DE NEWTON: 66
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1993/1994 70
NOTA 3: TERCEIRA PROPORCIONAL E QUARTA PROPORCIONAL 73
NOTA 4: ÁREA DE TRIÂNGULOS 75
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1991/1992 97
NOTA 5: REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE FRAÇÕES 105
PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1990/1991 113
NOTA 6: JUROS SIMPLES 118

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão ao Colégio Naval (CN) dos anos de 1984 a 2016, mais uma "faixa bônus" com 40 questões anteriores a 1984, detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto. Na parte E serão apresentadas as provas de 1991 a 1996, totalizando 100 questões (não houve o concurso 1992-1993).

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 35 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da Colégio Naval ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ); participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Madeмática".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores que me inspiraram a trilhar esse caminho e à minha família pelo apoio, especialmente, aos meus pais, Cézar e Sueli, pela dedicação e amor.
Gostaria ainda de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante toda a elaboração dessa obra e a meus filhos Daniel e Davi que eu espero sejam futuros leitores deste livro.

Renato Madeira

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1995-1996

1) Sejam os triângulos ABC e MPQ, tais que:

I - $M\hat{P}Q = A\hat{C}B = 90^\circ$

II - $P\hat{Q}M = 70^\circ$

III - $B\hat{A}C = 50^\circ$

IV - $\overline{AC} = \overline{MP}$

Se $\overline{PQ} = x$ e $\overline{BC} = y$, então $\overline{AB}$ é igual a:

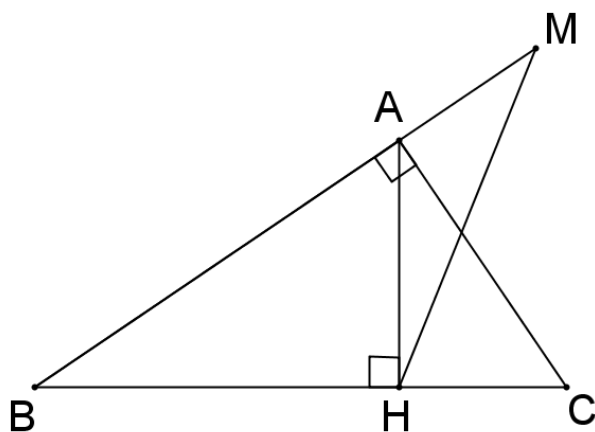
(A) $x + y$

(B) $\sqrt{x^2 + y^2}$

(C) $\dfrac{2xy}{(x+y)^2}$

(D) $\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y}$

(E) $2x + y$

2) No triângulo ABC, retângulo em A, da figura, $AB = c$, $AC = b$, $AM = 2$ e AH é a altura relativa ao lado BC. Qual é a área do triângulo AHM?

(A) $\dfrac{bc}{b^2 + c^2}$

(B) $\dfrac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$

(C) $\dfrac{bc^2}{b^2 + c^2}$

(D) $\dfrac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$

(E) $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

3) O quociente da divisão de $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ por $(a+b)\left[c^2+c(a+b)+ab\right]$ é:
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

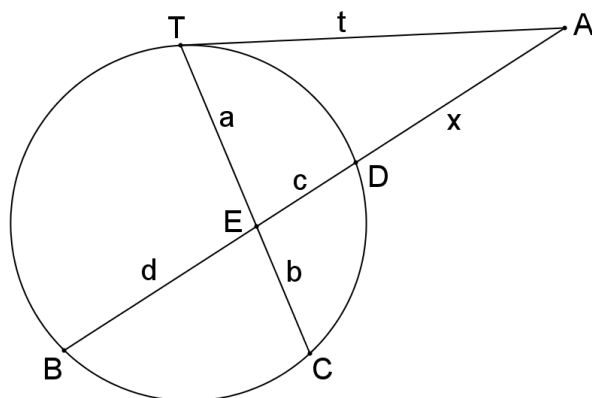
4) Considere a equação do 2° grau em x tal que $ax^2+bx+c=0$, onde a, b e c são números reais com "a" diferente de zero. Sabendo que 2 e 3 são as raízes dessa equação, podemos afirmar que:
(A) $13a+5b+2c=0$.
(B) $9a+3b-c=0$.
(C) $4a-2b=0$.
(D) $5a-b=0$.
(E) $36a+6b+c=0$.

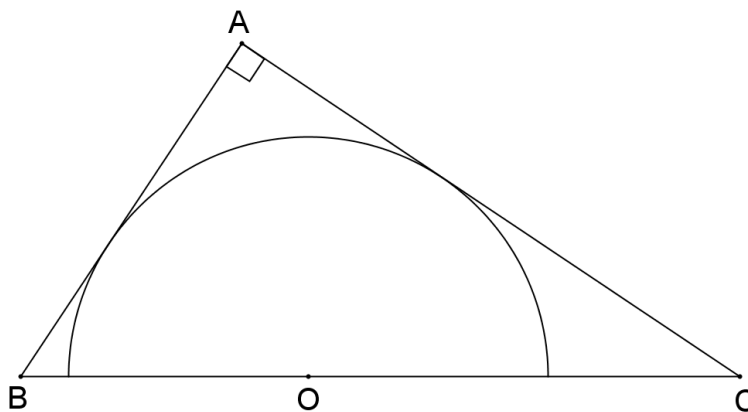
5) Sejam ABCDEFGHIJKL os vértices consecutivos de um dodecágono regular inscrito num círculo de raio $\sqrt{6}$. O perímetro do triângulo de vértices AEH é igual a:
(A) $3\left[3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$.
(B) $3\left[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$.
(C) $3\left[1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$.
(D) $3\left[2+\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right]$.
(E) $3\left[1-\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right]$.

6) Sabendo-se que a velocidade para rebobinar uma fita de vídeo é $\dfrac{52}{3}$ da normal, qual o tempo gasto para rebobinar uma fita de um filme de 156 minutos?
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

7) Considere as afirmativas sobre o triângulo ABC:
I − Os vértices B e C são equidistantes da mediana AM, M é o ponto médio do segmento BC;
II − A distância do baricentro G ao vértice B é o dobro da distância de G ao ponto N, médio do segmento AC;
III − O incentro I é equidistante dos lados do triângulo ABC;
IV − O circuncentro S é equidistante dos vértices A, B e C.

O número de afirmativas verdadeiras é:
(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

8) Na figura, AT é tangente ao círculo, TC e BD são as cordas que se interceptam no ponto E. Sabe-se que existe a relação $c^2 + d^2 + 2ab + 4t^2 = 4(c+d)^2$. O valor de x é:

(A) $\frac{c+d}{2}$
(B) $\frac{c+d}{3}$
(C) $\frac{2c+d}{4}$
(D) $\frac{c+2d}{8}$
(E) $\frac{3c+4d}{6}$

9) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, o ponto O é o centro do semicírculo de raio r, tangente aos lados AB e AC. Sabendo-se que $OB = r\sqrt{3}$, a área do triângulo ABC é dada por:

(A) $\frac{r^2}{3}(2\sqrt{2}+4)$

(B) $\frac{r^2}{4}(2\sqrt{3}+4)$

(C) $\frac{r^2}{4}(3\sqrt{2}+2)$

(D) $\frac{r^2}{4}(3\sqrt{2}+4)$

(E) $\frac{r^2}{3}(4\sqrt{3}+4)$

10) Num depósito estão guardadas 300 folhas de compensado de espessura $5,0\text{ mm}$ e $1,5\text{ cm}$, respectivamente, formando uma pilha com $2,35\text{ m}$ de altura. Qual é a soma dos algarismos do número que expressa a quantidade de folhas?
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

11) Quantos valores de $K \in \mathbb{Z}$ existem tais que $\frac{113 \cdot K + 7}{K+1}$ é um número inteiro?
(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

12) Um comerciante aumentou o preço de uma mercadoria em 25%. Contudo a procura por essa mercadoria continuou grande. Então ele fez um novo aumento de 10%. Como o preço ficou muito alto, a mercadoria encalhou e, além disso, o prazo de validade estava vencendo. Finalmente fez um desconto para que o preço voltasse no valor inicial. Esse último desconto:
(A) foi de 35%.
(B) ficou entre 30% e 35%.
(C) ficou entre 27% e 28%.
(D) foi de 25%.
(E) ficou entre 22% e 25%.

13) Sejam C_1 e C_2 dois círculos ortogonais de raios R_1 e R_2. A distância entre os centros é π. A soma das áreas dos círculos é igual a:

(A) $\frac{3\pi^2}{2}$.

(B) $\frac{\pi^2}{4}$.

(C) π^2.
(D) π^3.
(E) $\frac{5\pi^2}{4}$.

14) Dadas as operações: $x*y=x+y$, $x\#y=x-y$ e $x\Delta y=x^y$; o valor da expressão $[2*(8\#12)]*\{[(3*2)\#5]\Delta[10*(2\#(4\Delta 2))]\}$
(A) não é real
(B) é igual a -1
(C) é igual a -2
(D) é igual a -3
(E) é igual a -4

15) Dadas as afirmativas a seguir:
1) $x^5-1\equiv(x^2-1)(x+1)(x-1)$
2) $x^5-1\equiv(x-1)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)$
3) $x^5-1\equiv(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
4) $x^5-1\equiv(x^3+1)(x^2-1)$
5) $x^5-1\equiv(x-1)(x+1)(x-1)(x+1)(x-1)$
Quantas são verdadeiras?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

16) Se K abelhas, trabalhando K meses do ano, durante K dias do mês e durante K horas por dia, produzem K litros de mel; então o número de litros de mel produzidos por W abelhas, trabalhando W horas por dia, em W dias e em W meses do ano será:
(A) $\frac{K^3}{W^2}$
(B) $\frac{W^5}{K^3}$
(C) $\frac{K^4}{W^3}$
(D) $\frac{W^3}{K^3}$
(E) $\frac{W^4}{K^3}$

17) Os raios das rodas dos carros A, B e C, inscritos em uma corrida, são respectivamente iguais a x, $2x$ e $3x$. Quantos quilômetros, respectivamente, percorrerão os três carros, se desenvolverem uma velocidade de $80\ km/h$ durante 4 horas?
(A) 320, 640 e 960
(B) 240, 640 e 960
(C) 320, 160 e 80
(D) 320, 320 e 320
(E) 640, 320 e 160

18) Sabendo-se que o resultado de $12\times11\times10\times...\times3\times2\times1+14$ é divisível por 13, qual o resto da divisão do número $13\times12\times...\times3\times2\times1$ por 169?
(A) 143.
(B) 149.
(C) 153.
(D) 156.
(E) 162.

19) Sobre o número $\frac{1937}{8192}$ podemos afirmar que é:
(A) uma dízima periódica simples
(B) uma dízima periódica composta
(C) um decimal exato com 12 casas decimais
(D) um decimal exato com 13 casas decimais
(E) um decimal exato com 14 casas decimais

20) Sejam A, B, C e D números naturais maiores que 1. Para que a igualdade $\dfrac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\frac{C}{D}} = \dfrac{\frac{B}{A}}{\left(\frac{C}{D}\right)}$, seja verdadeira é necessário que:
(A) $A^2 = \frac{B^3C}{D}$
(B) $B^2C = AD$
(C) $A^4 = B^4C^4$
(D) $\frac{A^2}{D^2} = \frac{B}{C}$
(E) $B^3 = C^2$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1994/1995

1) Um retângulo é obtido unindo-se os pontos médios dos lados de um trapézio retângulo $ABCD$, de bases $AB = 32$ e $CD = 8$. A altura BC é igual a:
(A) 8
(B) 10
(C) 12
(D) 16
(E) 20

2) O trinômio $y = x^2 - 14x + k$, onde k é uma constante real positiva, tem duas raízes reais distintas. A maior dessas raízes pode ser:
(A) 4
(B) 6
(C) 11
(D) 14
(E) 17

3) Seja P o produto de 3 números positivos. Se aumentarmos dois deles de 20% e diminuirmos o outro de 40%, teremos que P:
(A) não se altera.
(B) aumenta de $13,6\%$.
(C) aumenta de 10%.
(D) diminui de 10%.
(E) diminui de $13,6\%$.

4) Sabendo-se que a seguinte identidade $\frac{a \cdot x + b \cdot y}{x \cdot y} = \frac{a}{y} + \frac{b}{x}$ é verdadeira para quaisquer números reais $a, b, x \neq 0$ e $y \neq 0$, o valor de

$$\frac{13}{2 \cdot 4} + \frac{13}{4 \cdot 6} + \frac{13}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{13}{50 \cdot 52}$$

é igual a:
(A) $\frac{25}{16}$
(B) $\frac{25}{12}$
(C) $\frac{25}{8}$
(D) $\frac{25}{4}$
(E) $\frac{25}{2}$

5) A que distância do vértice de um triângulo equilátero de lado igual 6 cm deve-se traçar uma reta paralela à base, de forma que o quadrilátero assim obtido seja circunscritível?

(A) $\sqrt{3}$ cm

(B) $2\sqrt{3}$ cm

(C) $3\sqrt{3}$ cm

(D) $4\sqrt{3}$ cm

(E) $5\sqrt{3}$ cm

6) Em um triângulo de vértices A, B e C, retângulo em A, os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente $6\sqrt{3}$ cm e 6 cm. Traça-se o segmento $\overline{AM}$, com M pertencente e interno ao segmento $\overline{BC}$. Sabendo-se que o ângulo $M\hat{A}C$ mede 15°, a razão entre as áreas dos triângulos AMC e ABC é:

(A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(C) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

(E) impossível de se determinar com apenas esses dados.

7) Sobre o conjunto solução em $\mathbb{R}$ da equação $\sqrt{(2x+1)^2} = x-3$, podemos afirmar que:

(A) é unitário cujo elemento é positivo.

(B) possui dois elementos em que um é racional e outro irracional.

(C) é vazio.

(D) é unitário cujo elemento é negativo.

(E) possui dois elementos irracionais.

8) Um capital C foi aplicado a uma taxa mensal numericamente igual ao capital. Quantos meses são necessários para que os juros simples sejam iguais ao quadrado do capital?

(A) 20

(B) 50

(C) 100

(D) 200

(E) 400

9) Analise as afirmativas abaixo:

(I) Se $x^2 - 4x > x$, então $x > 5$.

(II) Se $x^2 - 1 > 0$ então $x > 1$.

(III) Se $\sqrt{x-3} = x+1$, então x só pode ser igual a 1.

(IV) $\frac{x^2-36}{x-6}=x+6$ para todo x real.
Assinale a alternativa correta:
(A) Todas as afirmativas são corretas.
(B) Apenas as afirmativas I, II e III são corretas.
(C) Apenas as afirmativas III e IV são corretas.
(D) Somente a afirmativa I é correta.
(E) Nenhuma das afirmativas é correta.

10) Um polígono regular convexo tem seu número de diagonais expresso por $n^2-10n+8$, onde n é o seu número de lados. O seu ângulo interno x é tal que:

a) $x<120^\circ$

b) $120^\circ<x<130^\circ$

c) $130^\circ<x<140^\circ$

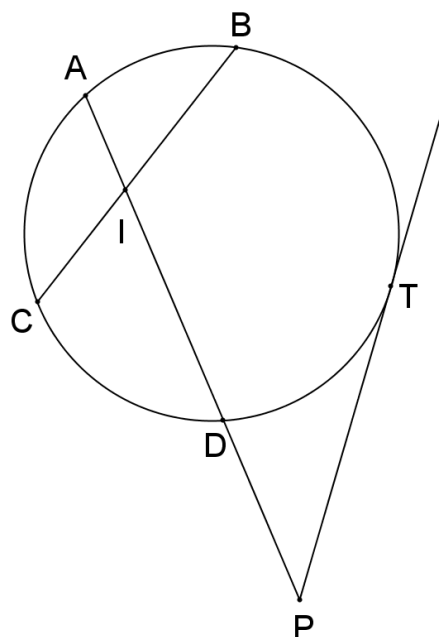
d) $140^\circ<x<150^\circ$

e) $x>150^\circ$

11) Os números a, b e c são inteiros não nulos, tais que: $\begin{cases}144a+12b+c=0\\256a+16b+c=0\end{cases}$, logo $\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}$ pode ser
(A) 151
(B) 152
(C) 153
(D) 154
(E) 155

12) Resolvendo-se a expressão $\frac{8^{0,666...}+4^{3/2}-2^{\sqrt{9}}+9^{0,5}}{\left(\frac{1}{49}\right)^{-1/2}}$, encontra-se

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

13) Na figura abaixo, $\overline{PA}$ é uma secante ao círculo, $\overline{PT}$ é uma tangente ao círculo e $\overline{BC}$ é uma corda do círculo. Qual das relações abaixo sempre será válida?

(A) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}$

(B) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{AD}}$

(C) $\frac{\overline{CI}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{DI}}$

(D) $\frac{\overline{PT}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{PI}}$

(E) $\frac{\overline{PD}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{PA}}$

14) Sejam $M = \frac{x \cdot y}{x + y}$, onde x e y são reais positivos, logo M é:

(A) o quociente entre a média geométrica e a média aritmética de x e y.
(B) a metade do quociente entra média geométrica e a média aritmética de x e y.
(C) a média aritmética dos inversos de x e y.
(D) a média harmônica de x e y.
(E) a metade da média harmônica de x e y.

15) Calcule a soma dos cubos das raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$.
(A) 1
(B) -4
(C) -3
(D) -8
(E) -6

16) A fração $\frac{312}{455}$ é equivalente à fração irredutível $\frac{a}{b}$, logo $a+b$ é igual a:
(A) 53
(B) 55
(C) 57
(D) 59
(E) 61

17) A equação $x^4-8x^2+k^2-5=0$, onde k é um número inteiro, tem 4 raízes reais. A soma dos valores absolutos de k é:
(A) 13
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 17

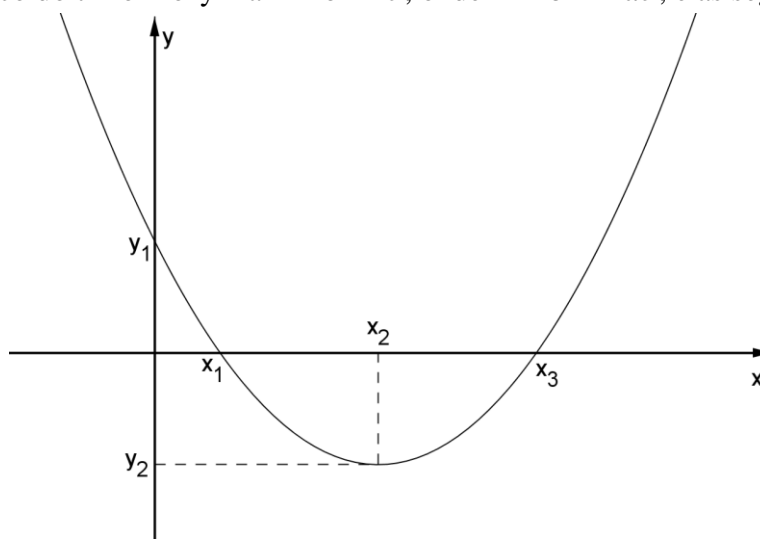
18) Num concurso, cada candidato fez uma prova de Português e uma de Matemática. Para ser aprovado, o aluno tem que passar nas duas provas. Sabe-se que o número de candidatos que passaram em Português é o quádruplo do número de aprovados no concurso; dos que passaram em Matemática é o triplo do número de candidatos aprovados no concurso; dos que não passaram nas duas provas é a metade do número de aprovados no concurso; e dos que fizeram o concurso é 260. Quantos candidatos foram reprovados no concurso?
(A) 140
(B) 160
(C) 180
(D) 200
(E) 220

19) Qual deverá ser o menor número inteiro que somado a cada um dos números 6, 8 e 14, obtém-se as medidas dos lados de um triângulo em que o ortocentro está no seu interior?
(A) 9
(B) 10
(C) 11
(D) 12
(E) 13

20) O quociente entre a maior e a menor raiz da equação $\sqrt[9]{x}+\frac{\sqrt[9]{x^8}}{x}=\frac{17}{4}$ é:
(A) 2^{27}
(B) 2^{32}
(C) 2^{36}
(D) 2^{45}
(E) 2^{54}

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1993/1994

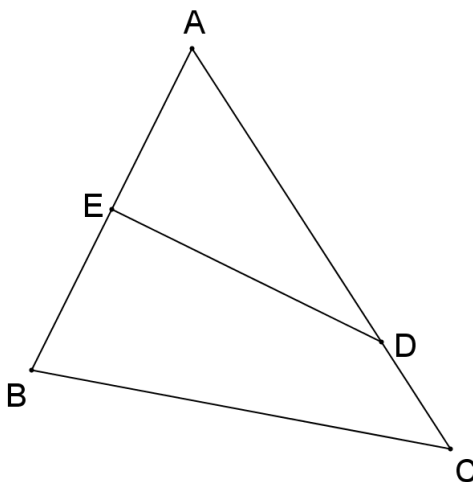
1) Sendo x o lado do quadrado inscrito em um hexágono regular convexo de lado 12, tem-se que:
(A) $13 < x < 13,5$
(B) $13,5 < x < 14$
(C) $14 < x < 14,5$
(D) $14,5 < x < 15$
(E) $15 < x < 15,5$

2) Considere o gráfico do trinômio $y = ax^2 + bx + c$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, e as seguintes afirmativas:

(I) $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
(II) $x_2 = \frac{-b}{2a}$
(III) $y_2 = \frac{-\Delta}{4a}$
(IV) $y_1 = c$
Quantas são as afirmativas verdadeiras?
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

3) A que taxa de juros simples, em porcentagem, ao ano deve-se emprestar um certo capital, para que no fim de 6 anos e 8 meses, duplique de valor?
(A) 10
(B) 12
(C) 15
(D) 18
(E) 20

4) Se o número "x" é a terceira proporcional entre os números $\underline{a}$ e $\underline{b}$, então os segmentos de medidas respectivamente iguais a $\underline{a}$, $\underline{x}$ e $\underline{b}$ podem ser num triângulo retângulo, respectivamente
(A) a hipotenusa, um cateto e a projeção deste cateto sobre a hipotenusa.
(B) a hipotenusa, um cateto e o outro cateto.
(C) a hipotenusa, uma projeção e a outra projeção dos catetos sobre a hipotenusa.
(D) uma projeção, a outra projeção dos catetos sobre a hipotenusa e a altura.
(E) um cateto, o outro cateto e a altura relativa à hipotenusa.

5) Em um navio existem 6 barcos e 15 guarnições. Cada barco tem uma guarnição de serviço por dia. Quantos dias, no mínimo, serão necessários para que todas as guarnições tenham ficado de serviço o mesmo número de vezes?
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 15

6) O triângulo ADE da figura é equivalente ao quadrilátero BCDE. Se $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$, então $\overline{AD}$ é qual fração de $\overline{AC}$?

(A) $\frac{2}{3}$
(B) $\frac{3}{4}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{4}{5}$
(E) $\frac{5}{8}$

7) Um aluno escreveu o ângulo formado pelas mediatrizes de dois lados adjacentes de um polígono regular convexo de treze lados, em graus, minutos e segundos. Sendo estes últimos com uma parte inteira e outra fracionária. Assim sendo, pode-se afirmar que o número inteiro de segundos é:
(A) 26
(B) 28
(C) 30
(D) 32
(E) 34

8) O número $\frac{1}{\sqrt[4]{2\sqrt{2}+3}}$ é igual a
(A) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$
(B) $\sqrt{\sqrt{2}+2}$
(C) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$
(D) $\sqrt{1-\sqrt{2}}$
(E) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$

9) O resto da divisão do número 743^{48} por 6 é:
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

10) Um tanque tem duas torneiras para enchê-lo. A primeira tem uma vazão de 6 litros por minuto e a segunda de 4 litros por minuto. Se metade do tanque é enchido pela primeira torneira num certo tempo t_1, e o restante pela segunda em um certo tempo t_2, qual deveria ser a vazão, em litros, por minuto de uma única torneira para encher completamente o tanque no tempo t_1+t_2?
(A) $4,5$
(B) $4,8$
(C) $5,0$
(D) $5,2$
(E) $5,8$

11) A razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é um número
(A) que varia em função do raio da circunferência.
(B) constante e inteiro.
(C) constante e tem notação decimal finita.
(D) constante e tem notação decimal infinita periódica.
(E) constante e tem notação decimal infinita e não periódica.

12) Para que valores de k e p o sistema

$$\begin{cases} kx - 6y = 5k - 3p \\ (k-4)x + 2y = 4k + 3 \end{cases}$$

é indeterminado?
(A) $k = 20$ e $p = 3$
(B) $k = 10$ e $p = 6$
(C) $k = 10$ e $p = 3$
(D) $k = 3$ e $p = 20$
(E) $k = 3$ e $p = 10$

13) Considere que, ao congelar-se, a água aumenta de $\frac{1}{15}$ do seu volume. Quantos litros de água obtém-se, quando se descongela um bloco de gelo de $0,50\text{ m}$ de comprimento, $0,30\text{ m}$ de largura e $0,40\text{ m}$ de altura?
(A) 56
(B) $56,25$
(C) $56,5$
(D) 60
(E) 64

14) Considere a equação do primeiro grau em "x": $m^2x + 3 = m + 9x$. Pode-se afirmar que a equação tem conjunto verdade unitário se:
(A) $m = 3$
(B) $m = -3$
(C) $m \neq -3$
(D) $m \neq 3$
(E) $m \neq 3$ e $m \neq -3$

15) A soma das raízes da equação de raízes reais $mx^4 + nx^2 + p = 0$, $m \neq 0$, é:
(A) 0
(B) $-\frac{n}{m}$
(C) $-\frac{2n}{m}$
(D) $\frac{p}{m}$
(E) $-\frac{p}{m}$

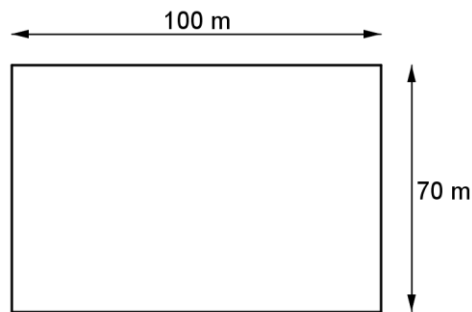
16) Num certo país, o governo resolveu substituir todos os impostos por um imposto único, que seria, no caso dos salários, de 20% sobre os mesmos. Para que um trabalhador receba, após o desconto, o mesmo salário que recebia antes, deverá ter um aumento sobre o mesmo de:
(A) 15%
(B) 20%

(C) 25%
(D) 40%
(E) 50%

17) Os raios de dois círculos medem 15 m e 20 m, e a distância dos seus centros é 35 m. O segmento da tangente comum, compreendido entre os pontos de contato, mede em metros:
(A) $5\sqrt{3}$
(B) $10\sqrt{3}$
(C) $12\sqrt{3}$
(D) $15\sqrt{3}$
(E) $20\sqrt{3}$

18) Se $\begin{cases} \dfrac{4x-9}{7} < x-3 \\ \dfrac{3x+10}{4} > 2x-5 \end{cases}$, então:
(A) $x < 4$
(B) $4 < x < 6$
(C) $5 < x < 6$
(D) $6 < x < 7$
(E) $x > 7$

19) Efetuando-se $\dfrac{x}{2+y} + \dfrac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4} : \dfrac{2-x}{2+y}$, encontra-se:
(A) $\dfrac{x}{2+y}$
(B) $\dfrac{x+2}{y+2}$
(C) $\dfrac{2}{y+2}$
(D) $\dfrac{2x}{y+2}$
(E) $\dfrac{2-x}{y+2}$

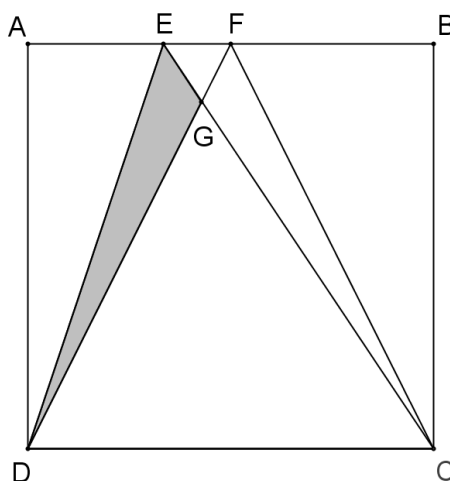
20) A área esquematizada abaixo representa um pátio para estacionamento de veículos. Reservando-se um espaço retangular mínimo de 2 metros por 3 metros para cada um, quantos veículos no máximo pode-se ali estacionar?

(A) 1150
(B) 1155
(C) 1160
(D) 1166
(E) 1170

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1991/1992

1) Considere a seguinte questão já resolvida por um aluno e numere a segunda coluna de acordo com a 1ª:

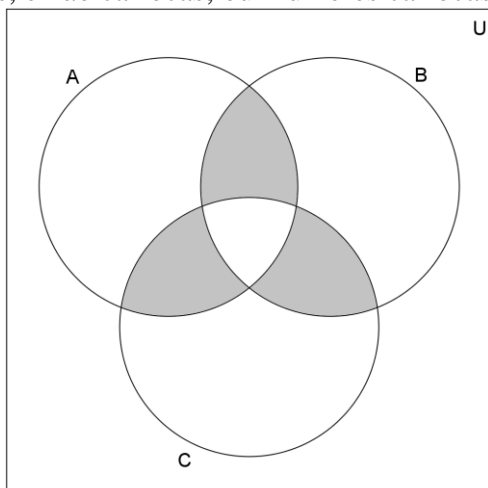
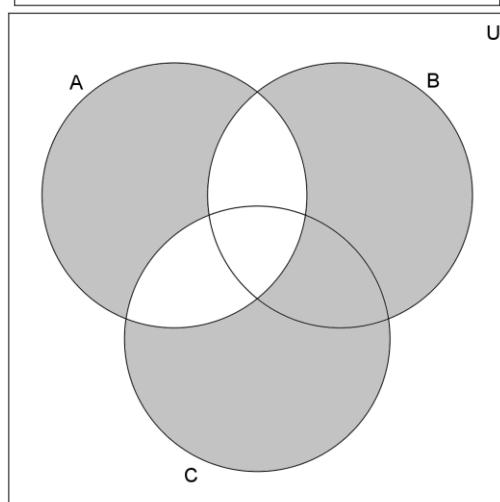
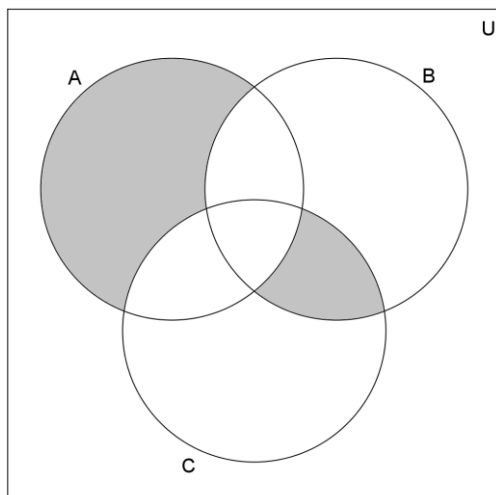
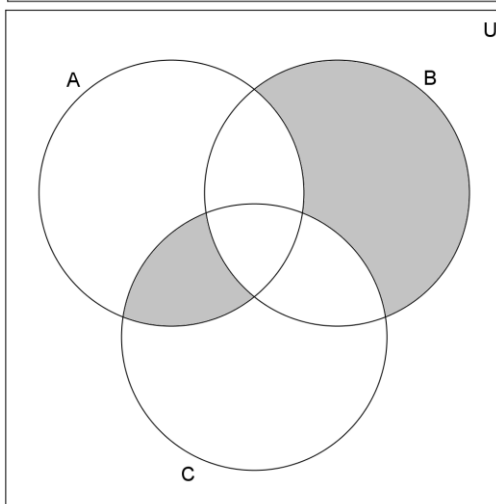
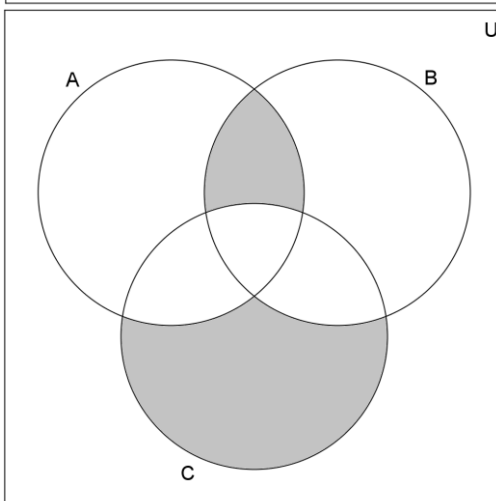
1ª COLUNA	2ª COLUNA
(1) A soma dos quadrados de três e cinco. (2) Menos três ao quadrado. (3) O quadrado da soma de três e cinco. (4) O quadrado do oposto de três. (5) O oposto de sete menos cinco. (6) O oposto da diferença entre sete e cinco. (7) A diferença entre o quadrado e o triplo de um número. (8) O quadrado de um número menos três, vezes o mesmo número.	(2) $(-3)^2$ (5) $-(7-5)$ (1) $(3+5)^2$ (8) x^2-3x

Logo, o número de acertos do aluno é:
(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

2) Sendo ABCD um quadrado de área S, onde $AF = \frac{1}{2}AB$ e $AE = \frac{1}{3}AB$, a área sombreada na figura é:

(A) $\frac{S}{12}$
(B) $\frac{S}{14}$
(C) $\frac{S}{18}$

(D) $\frac{11S}{70}$
(E) $\frac{31S}{420}$

3) Sobre uma circunferência, marcam-se os n pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de tal maneira que os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 têm medidas iguais à da corda do arco de $157^\circ 30'$ dessa mesma circunferência. Logo o número $\underline{n}$ é:
(A) primo.
(B) múltiplo de 3.
(C) múltiplo de 6.
(D) potência de 2.
(E) múltiplo de 5.

4) Sejam U o conjunto das brasileiras, A o conjunto das cariocas, B o conjunto das morenas e C o conjunto das mulheres de olhos azuis. O diagrama que representa o conjunto de mulheres morenas ou de olhos azuis, e não cariocas; ou mulheres cariocas e não morenas e nem de olhos azuis é:
(A)
(B)

(C)

(D)

(E)

5) Um cofre é equipado com sistema automático que o destranca por um minuto e volta a trancá-lo se não for aberto. Tal sistema tem dois dispositivos independentes: um que dispara de 46 minutos em 46 minutos, após ser ligado o sistema, e o outro de 34 minutos em 34 minutos. Sabendo-se que o cofre pode ser aberto tanto por um, quanto pelo outro dispositivo, e que um não anula o outro, quantas vezes por dia, pode-se dispor do cofre para abertura, sendo o sistema ligado a zero hora?
(A) 74

(B) 73
(C) 72
(D) 71
(E) 70

6) Um livro de 200 páginas vai ser numerado no sistema de numeração de base 8. O número na base 10 de algarismos que serão utilizados é:
(A) 520
(B) 525
(C) 530
(D) 535
(E) 540

7) Para a construção com a régua e compasso do número $\sqrt{r}$, r primo, um aluno determinou a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujas projeções dos catetos sobre a hipotenusa são números
(A) primos.
(B) cujo quociente pode ser $r-1$.
(C) cuja diferença é $r-1$.
(D) múltiplo de r.
(E) cuja soma é r.

8) O valor numérico da expressão $a^4-2a^2b^2+b^4$ para $a=\frac{8}{17}$ e $b=\frac{9}{17}$ é um número N tal que:
(A) $N<0$
(B) $10^{-4}<N<10^{-3}$
(C) $10^{-3}<N<10^{-2}$
(D) $10^{-2}<N<10^{-1}$
(E) $10^{-1}<N<1$

9) Num quadrilátero inscritível, um de seus ângulos é a sexta parte do seu ângulo oposto. Escrito em graus, minutos e segundos, o número da parte inteira de segundos, do referido ângulo, é:
(A) 50
(B) 51
(C) 52
(D) 53
(E) 54

10) O número de soluções inteiras da equação $4x^5+11x^3-3x=0$ é
(A) 5
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

11) Para se explicitar $\underline{x}$ na equação $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, usa-se o recurso da complementação de quadrados. Usando-se o recurso da complementação de cubos um aluno determinou uma raiz real r da equação $x^3-6x^2+12x-29=0$. Pode-se afirmar que:
(A) $0<r<1$
(B) $1<r<2$
(C) $2<r<3$
(D) $3<r<4$
(E) $4<r<5$

12) O conjunto verdade da equação $\frac{x^2-1}{2x+2}-\frac{x-1}{2}=-\frac{x+1}{2}$ em $\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais), é:
(A) $\varnothing$
(B) $\{-1\}$
(C) $\mathbb{Q}$
(D) $\{-1;\ 1\}$
(E) $\{1\}$

13) Seja M um conjunto cujos elementos são números naturais compostos por três algarismos distintos e primos absolutos. Sabe-se que o inverso de cada um deles é uma dízima periódica simples e que, invertendo-se a posição dos algarismos das centenas com os das unidades, em todos eles, os respectivos inversos são dízimas periódicas compostas. O número de subconjuntos de M é:
(A) 16
(B) 256
(C) 1024
(D) 2048
(E) maior que 3000

14) O produto de todos os divisores inteiros de 144 é:
(A) $-2^{30}\times 3^{15}$
(B) $2^{30}\times 3^{15}$
(C) $-2^{60}\times 3^{30}$
(D) $2^{60}\times 3^{30}$
(E) -6^{30}

15) $\underline{S}$ é a área do segmento circular do ângulo de 40° de um círculo de raio 6. Logo, pode-se afirmar que:
(A) $0,4<S<1,5$
(B) $1,5<S<2,4$
(C) $2,4<S<3,5$
(D) $3,5<S<4,4$
(E) $4,4<S<5,0$

16) Se r é a menor raiz da equação $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^4}=\sqrt{x^6}$, então
(A) $r<-1$
(B) $-1<r<0$
(C) $r=0$
(D) $0<r<1$
(E) $r>1$

17) Um sistema de três equações do 1º grau com duas incógnitas é determinado. Logo um sistema formado por apenas duas dessas equações
(A) é determinado.
(B) é indeterminado.
(C) é impossível.
(D) pode ser impossível ou determinado.
(E) pode ser indeterminado ou determinado.

18) Se a equação $x^4-4(m+2)x^2+m^2=0$ admite quatro raízes reais, então
(A) o maior valor inteiro de m é -3.
(B) a soma dos três menores valores inteiros de m é zero.
(C) a soma dos três maiores valores inteiros de m é -12.
(D) só existem valores inteiros e positivos para m.
(E) só existem valores negativos para m.

19) Num triângulo ABC as medidas dos lados AB, AC e BC, são respectivamente iguais a 4, 6 e 8. Da extremidade D da bissetriz AD traça-se o segmento DE, E pertencente ao lado AB, de tal forma que o triângulo BDE é semelhante ao triângulo ABD. A medida do segmento BE é igual a:
(A) $2,56$
(B) $1,64$
(C) $1,32$
(D) $1,28$
(E) 1

20) A eleição para o diretor de um colégio é feita por voto de qualidade dos votos válidos. Os votos dos professores valem 50%, os votos dos alunos 45% e os votos dos funcionários 5%. Apurados os votos válidos, obteve-se a seguinte tabela:

	Votaram em A	**Votaram em B**
ALUNOS	600	480
PROFESSORES	15	180
FUNCIONÁRIOS	240	40

Sabendo-se que o resultado é homologado se, e somente se, o vencedor tiver 10% mais que o oponente, pode-se concluir que:
(A) não houve vencedor
(B) o candidato A venceu por uma margem aproximada de 20% dos votos válidos.
(C) o candidato A venceu por uma margem aproximada de 30% dos votos válidos.
(D) o candidato B venceu por uma margem aproximada de 20% dos votos válidos.
(E) o candidato B venceu por uma margem aproximada de 30% dos votos válidos.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1990/1991

1) Considere a seguinte subtração, onde x, b e z são algarismos:

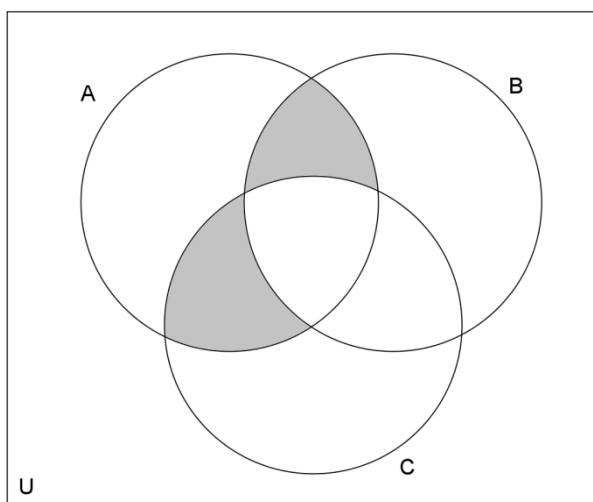
$$\begin{array}{r} 6\ 8\ 4\ x \\ -\,x\ 6\ 8\ 4 \\ \hline b\ x\ b\ z \end{array}$$

Logo, $x+b+z$ é igual a:
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

2) Uma fábrica de fósforo usa as seguintes definições:

Caixa: conjunto de 45 fósforos
Maço: conjunto com 10 caixas
Pacote: conjunto com 12 maços

Dividindo-se 13 pacotes, 5 maços, 8 caixas e 22 fósforos por 8, obtém-se um número $\underline{p}$ de pacotes, $\underline{m}$ de maços, $\underline{c}$ de caixas e $\underline{f}$ de fósforos, tais que $p+m+c+f$ é igual a:
(A) 25
(B) 26
(C) 27
(D) 28
(E) 29

3) Considere os diagramas onde A, B, C e U são conjuntos. A região sombreada pode ser representada por:

(A) $(A\cap B)\cup(A\cap C)-(B\cap C)$
(B) $(A\cap B)\cup(A\cap C)-(B\cup C)$
(C) $(A\cup B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$
(D) $(A\cup B)-(A\cup C)\cap(B\cap C)$

(E) $(A-B)\cap(A-C)\cap(B-C)$

4) Considere as afirmativas:
I − O número 1147 não é primo.
II − Todo o número da forma $abba$, onde a e b são algarismos, é divisível por 11.
III − Todo número múltiplo de 5 e 15 é múltiplo de 75.
IV − O número de divisores naturais de 576 é divisor de 63.
O número de afirmativas verdadeiras é
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

5) A expressão $\dfrac{(0,5)^{-2} \cdot 2^{0,333...} \cdot \sqrt[3]{16}}{(0,125)^{-3}}$ escrita como potência de base 2, tem como expoente:
(A) $-\dfrac{14}{3}$
(B) $-\dfrac{16}{3}$
(C) -6
(D) $-\dfrac{22}{3}$
(E) -8

6) O conjunto P é formado por três elementos respectivamente proporcionais a 2, 3 e 7. Sabendo que o menor mais o triplo do maior menos o dobro do outro é igual a 34, a soma destes três elementos é igual a:
(A) 20
(B) 21
(C) 22
(D) 23
(E) 24

7) Uma aplicação do mercado financeiro, que rende 0,3% ao dia, exige um mínimo de R$ 50.000,00 para ser efetuada. Uma pessoa que dispõe de R$ 45.000,00, toma R$ 5.000,00 a taxa de 1% ao dia, para fazer tal aplicação. Durante quantos dias, no mínimo, deverá aplicar para pagar o empréstimo e continuar aplicando? (Observação: Considerar os juros simples.)
(A) 40
(B) 43
(C) 45
(D) 47
(E) 50

8) O conjunto solução da equação $x-\sqrt{x+4}=2$, é:
(A) Unitário de elemento par.
(B) Unitário de elemento ímpar e primo.
(C) Unitário de elemento ímpar não primo.
(D) Binário.
(E) Vazio.

9) A soma dos valores de y que pertencem ao conjunto solução do sistema $\begin{cases} xy^2-x^2=8x \\ y+2x=5 \end{cases}$ é

(A) $-\frac{1}{2}$
(B) $\frac{13}{2}$
(C) $\frac{23}{2}$
(D) $\frac{9}{2}$
(E) Infinita

10) O resultado mais simples para a expressão $\sqrt[4]{\left(\sqrt{48}+7\right)^2}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{48}-7\right)^2}$ é:
(A) $2\sqrt{3}$
(B) $4\sqrt[4]{3}$
(C) 4
(D) $2\sqrt{7}$
(E) $\sqrt{4\sqrt{3}+7}+\sqrt{4\sqrt{3}-7}$

11) O conjunto verdade da inequação $\frac{1}{x^2-x}\le\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ é:
(A) $\{x\in\mathbb{R} \mid x<0 \text{ ou } x>1\}$
(B) $\{x\in\mathbb{R}^* \mid x\ne1 \text{ e } x\ne2\}$
(C) $\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\}$
(D) $\{x\in\mathbb{R} \mid x>2\}$
(E) $\{x\in\mathbb{R} \mid x>0, x\ne1 \text{ e } x\ne2\}$

12) Sendo m e n as raízes da equação $x^2-10x+1=0$, o valor da expressão $\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^3}$ é:
(A) 970
(B) 950
(C) 920
(D) 900

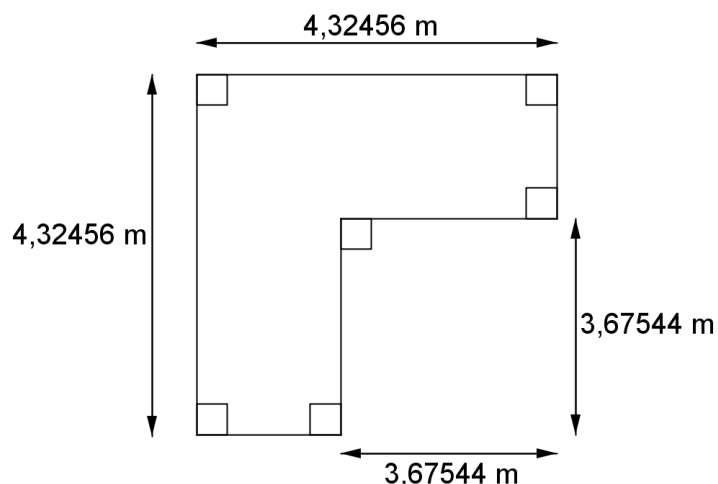
(E) 870

13) Um aluno encontrou zero para o valor numérico da expressão $x^2+y^2-2x+5+4y$. Pode-se concluir que os valores pelos quais substituiu as variáveis x e y são tais que sua soma é:
(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

14) Um polígono regular admite para medida de suas diagonais apenas os números $n_1, n_2, n_3, ..., n_{27}$ tais que $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_{27}$. Logo este polígono
(A) tem 30 lados.
(B) pode ter 54 lados.
(C) pode ter 57 lados.
(D) pode ter 58 lados.
(E) tem um número de lados maior que 60.

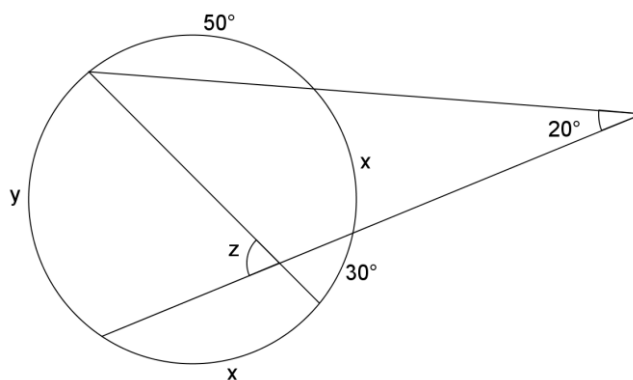
15) Sejam r_1, r_2 e d, respectivamente, os raios e a distância entre os centros de duas circunferências exteriores C_1 e C_2. Se $d = x^2+4$, $r_1 = 2x-3$ e $r_2 = x+2$, logo o conjunto de todos os valores de x é:
(A) 0
(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$
(C) $\mathbb{R}$
(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
(E) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{3}{2}\right\}$

16) Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ onde os lados AB e AC são, respectivamente, congruentes aos lados $A'B'$ e $A'C'$. Sabendo que os ângulos internos B e B' possuem a mesma medida, considere as seguintes afirmativas:
(I) Os triângulos ABC e $A'B'C'$ possuem o mesmo perímetro.
(II) Os triângulos ABC e $A'B'C'$ possuem a mesma área.
(III) Os ângulos C e C' podem ser suplementares.
Logo, pode-se afirmar que:
(A) Apenas I é verdadeira.
(B) Apenas II é verdadeira.
(C) Apenas III é verdadeira.
(D) Apenas I e II são verdadeiras.
(E) I, II e III são verdadeiras.

17) Qual a área do terreno da figura abaixo?

(A) $5,19296\text{ m}^2$
(B) $5,28386\text{ m}^2$
(C) $5,29176\text{m}^2$
(D) $5,31266\text{m}^2$
(E) $5,38756\text{m}^2$

18) O perímetro do heptágono regular convexo, inscrito num círculo de raio $2,5$, é um número $x \in \mathbb{R}$ tal que
(A) $14 < x < 15$
(B) $15 < x < 16$
(C) $16 < x < 17$
(D) $17 < x < 18$
(E) $18 < x < 19$

19) Considere a figura, onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são medidas angulares de arcos e $\underline{z}$ é a medida de ângulo assinalado. Pode-se afirmar que $x + y + z$ é igual a:

(A) 255º
(B) 265º
(C) 275º
(D) 285º
(E) 295º

20) Num triângulo retângulo ABC de catetos $AB = 8$ e $AC = 6$, a mediana AM intercepta a bissetriz BD no ponto E. A área do triângulo BME é expressa pelo número real x, tal que:

(A) $3,5 \leq x \leq 4,0$

(B) $4,0 < x \leq 4,5$

(C) $4,5 < x \leq 5,0$

(D) $5,0 < x \leq 5,5$

(E) $5,5 < x \leq 6,5$

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1995/1996

1) a (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
2) c (Áreas)
3) c (Produtos notáveis e fatoração)
4) a (Equação do 2° grau)
5) b (Polígonos – relações métricas)
6) e (Razões e proporções)
7) d (Triângulos – pontos notáveis)
8) a (Potência de ponto)
9) d (Triângulos retângulos)
10) d (Sistema métrico)
11) e (Múltiplos e divisores)
12) c (Operações com mercadorias)
13) d (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
14) a (Operações com números naturais e inteiros)
15) b (Produtos notáveis e fatoração)
16) e (Regra de três)
17) d (Razões e proporções)
18) d (Divisibilidade e congruência)
19) d (Números racionais)
20) c (Números racionais)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1994/1995

1) d (Quadriláteros)
2) c (Equação do 2° grau)
3) e (Porcentagem)
4) c (Polinômios)
5) a (Triângulos – pontos notáveis)
6) d (Áreas)
7) c (Equações irracionais)
8) c (Juros simples e compostos)
9) e (Inequações)
10) e (Polígonos – ângulos e diagonais)
11) b (Sistemas lineares)
12) a (Potências e raízes)
13) a (Potência de ponto)
14) e (Médias)
15) b (Equação do 2° grau)
16) d (Números racionais)
17) b (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)

18) e (Conjuntos)
19) b (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
20) c (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1993/1994

1) e (Polígonos – relações métricas)
2) e (Função quadrática)
3) c (Juros simples e compostos)
4) d (Triângulos retângulos)
5) a (MDC e MMC)
6) b (Áreas)
7) d (Polígonos – ângulos e diagonais)
8) c (Racionalização e radical duplo)
9) a (Divisibilidade e congruência)
10) b (Problemas tipo torneira)
11) e (Conjuntos numéricos e números reais)
12) d (Sistemas lineares)
13) b (Sistema métrico)
14) e (Equação do 1° grau)
15) a (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
16) c (Operações com mercadorias)
17) e (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
18) b (Inequações)
19) c (Produtos notáveis e fatoração)
20) d (Raciocínio lógico)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1991/1992

1) d (Operações com números naturais e inteiros)
2) b (Áreas)
3) d (Ângulos na circunferência e arco capaz)
4) b (Conjuntos)
5) c (Contagem)
6) c (Sistemas de numeração)
7) c (Triângulos retângulos)
8) c (Produtos notáveis e fatoração)
9) b (Quadriláteros)
10) d (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
11) e (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
12) a (Equações fracionárias)
13) b (Números racionais)
14) c (Múltiplos e divisores)
15) a (Áreas)
16) a (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
17) e (Sistemas lineares e problemas relacionados)
18) b (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)

19) a (Triângulos – semelhança e relações métricas)
20) e (Porcentagem)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1990/1991

1) c (Operações com números naturais e inteiros)
2) a (Raciocínio lógico)
3) a (Conjuntos)
4) d (Múltiplos e divisores)
5) b (Potências e raízes)
6) e (Razões e proporções)
7) e (Juros simples e compostos)
8) b (Equações e inequações irracionais)
9) d (Sistemas não lineares e problemas relacionados)
10) c (Racionalização e radical duplo)
11) e (Inequações produto quociente)
12) a (Equação do 2° grau)
13) b (Produtos notáveis e fatoração)
14) c (Polígonos – ângulos e diagonais)
15) c (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
16) c (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
17) a (Áreas)
18) b (Polígonos – relações métricas)
19) c (Ângulos na circunferência e arco capaz)
20) c (Áreas)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 1984 A 2016

ASSUNTO	F8	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL	PERCENTUAL
Raciocínio lógico									1		1							2	1														1	6	0,9%
Conjuntos		1	2	2	1	1	1		1	1		1			2	1		1					1	1	1			1	1		1		1	22	3,3%
Operações com números naturais e inteiros	1								1	1			1									1				1	1			2				8	1,2%
Números racionais	1				1					1		1	2	1	1		1				1									2	1	2		14	2,1%
Conjuntos numéricos e números reais						2					1					2									1				1					7	1,1%
Sistemas de numeração	1					1		1		1				1			1			1					1		2			1			2	12	1,8%
Múltiplos e divisores	2	1		1				1	1	1			1						2		1	1		2		1	1	1	1	2	3		2	23	3,5%
Divisibilidade e congruência		1			1						1		1					1			1	2					2	1	3	1		1		16	2,4%
Função parte inteira																												1						1	0,2%
MDC/MMC	1				1			1			1							1	2	1	1		2		1	2				1		1		15	2,3%
Razões e proporções		2			1		1		1				2		2		1	1		1	1		1		2		1					1		18	2,7%
Regra de três	3												1																				1	2	0,3%
Porcentagem			1							1		1		1			1	1			1			1		2								10	1,5%
Divisão em partes proporcionais e regra de sociedade			1	1																		1		1	1									5	0,8%
Operações com mercadorias				1			1	1			1		1	1	1			1		1			1					1						11	1,7%
Juros simples e compostos						1		1	1		1	1				1							1		1									8	1,2%
Misturas	1				1											1			1								1			1				5	0,8%
Médias		1	1					1				1						1	1					1									1	8	1,2%
Contagem e calendário					1					1				1						2					1						2			8	1,2%
Problemas tipo torneira	1		1								1												1	1	1									5	0,8%
Sistema métrico			1	1			1				1		1	1																				6	0,9%
Potências e raízes	1	3	2	1	2	1	1	1	1			1		1	1	1	3	3			2	1		1		1	1		2	2	1	1	1	35	5,3%
Produtos notáveis e fatoração	2	1	1	1	1	1	1		1	1	1		2		2	1		1				2	1	3	2	1			2	1		2		29	4,4%
Racionalização e radical duplo	2			1	1	1	1	1	1		1			1		1			1	1		1				1			1	1				15	2,3%
Equação do 2º grau	5	1	2	1	1	2	1	1	1			2	1			1	1		1		1	2			1	1	1				1	1		24	3,6%
Função quadrática	1	1	1		1	1	1	1			1				1	1				2		1	1	1		1	1							16	2,4%
Equações fracionárias										1									1							1		1	1	1				6	0,9%
Equações biquadradas e redutíveis ao 2º grau			1	1						4	1	2		1	2		1		1		1		1		1						1			18	2,7%
Equações e inequações irracionais	3	1					1		1			1		1						1	1			1		1		1	1		1	1		13	2,0%
Polinômios e equações polinomiais		1	1	3	2	1		1				1									1	1						2		1		1	1	17	2,6%
Sequências																													1					1	0,2%
Função do 1º grau				1																1									1					3	0,5%
Equação do 1º grau e problemas do 1º grau	1	1						1			1			1	1		2		1													1		9	1,4%
Sistemas lineares e problemas relacionados		1	2			1	2			1	1	1		1		2	1	1	1	1	2		1	1		1	1					1	1	24	3,6%
Sistemas não lineares e problemas relacionados	1	1		1		1	1	1	1											1				1		1		3			1			13	2,0%
Inequações											1	1		1						1								1						5	0,8%
Inequações produto-quociente	1	1		1	2		1	1	1						1							1	1				1				1		1	13	2,0%
Desigualdades																												1						1	0,2%
Fundamentos e ângulos																									1									1	0,2%
Triângulos - ângulos, congruência e desigualdades			1	1					1			1	1	1	1	1	2	2	1				1							1				15	2,3%
Triângulos - pontos notáveis												1	1	1		1					1						1	1			2		1	10	1,5%
Triângulos retângulos							1			1	1		1			1						1	1			1					1		1	10	1,5%
Triângulos - semelhança e relações métricas	2	1	1	2	2	1	1	1		1					1	2					2		1		1		1					2		20	3,0%
Quadriláteros	1		1	2		1	1			1		1		1				1			1	1		1		1	1	1	1	2				18	2,7%
Polígonos - ângulos e diagonais	2		2		1	1		1	1		1	1		1	1			1					2						1					14	2,1%
Polígonos regulares - relações métricas				1				1	1		1		1			1	1				1		2	1										11	1,7%
Circunferência - posições relativas e segmentos tangentes	1			1					1		1		1			1				1	1			1	1	1	1	1						12	1,8%
Arco capaz, ângulos e comprimentos na circunferência		1			1	1			1	1				1			1	1		2					1	1	1		1		2		1	17	2,6%
Circunferência - relações métricas e potência de ponto	3	2					1	1				1	1		2				1	1		1												11	1,7%
Áreas	3	3	3	1	4	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	4	1	5	2		3	1	2	2	1	2	3	2	1	2	5	5	69	10,5%
TOTAL POR PROVA	**40**	**25**	**25**	**25**	**25**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**660**	**100,0%**
Aritmética	11	6	7	6	7	5	4	6	6	7	8	5	10	6	6	5	4	9	7	6	6	5	7	7	10	6	8	5	6	10	7	5	8	210	31,82%
Álgebra	17	12	10	11	10	9	10	8	7	7	7	9	3	7	8	7	8	5	6	8	8	9	5	8	4	9	5	9	9	6	6	8	4	242	36,67%
Geometria Plana	12	7	8	8	8	6	6	6	7	6	5	6	7	7	6	8	8	6	7	6	6	6	8	5	6	5	7	6	5	4	7	7	8	208	31,52%

CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES POR ASSUNTO

ARITMÉTICA

RACIOCÍNIO LÓGICO: 2016-10; 2002-14; 2001-1; 2001-6; 1994-20; 1991-2;

CONJUNTOS: 2016-19; 2014-4; 2012-10; 2011-11; 2008-15; 2007-6; 2006-3; 2001-15; 1999-4; 1998-9; 1998-17; 1995-18; 1992-4; 1991-3; 1989-14; 1988-5; 1987-6; 1986-1; 1986-2; 1985-1; 1985-18; 1984-1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS: 2013-12; 2013-15; 2010-14; 2009-13; 2005-2; 1996-14; 1992-1; 1991-1; FB-16

NÚMEROS RACIONAIS: 2015-7; 2015-9; 2014-1; 2013-2; 2013-18; 2004-8; 2000-4; 1998-20; 1997-11; 1996-19; 1996-20; 1995-16; 1992-13; 1987-7; FB-12

CONJUNTOS NUMÉRICOS E NÚMEROS REAIS: 2012-11; 2008-20; 1999-10; 1999-15; 1994-11; 1988-1; 1988-2

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: 2016-3; 2016-12; 2013-4; 2010-3; 2010-13; 2008-5; 2003-18; 2000-3; 1997-3; 1992-6; 1990-9; 1988-3; FB-23

MÚLTIPLOS E DIVISORES: 2016-17; 2016-18; 2014-10; 2014-17; 2014-19; 2013-6; 2013-8; 2012-14; 2011-4; 2010-8; 2009-18; 2007-11; 2007-17; 2005-10; 2004-4; 2002-6; 2002-11; 1996-11; 1992-14; 1991-4; 1990-11; 1986-4; 1984-7; FB-7; FB-13

DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA: 2015-14; 2013-11; 2012-1; 2012-15; 2012-20; 2011-5; 2010-5; 2010-15; 2005-13; 2005-16; 2004-9; 2001-19; 1996-18; 1994-9; 1987-2; 1984-2

FUNÇÃO PARTE INTEIRA: 2011-8;

MDC E MMC: 2015-8; 2013-7; 2009-4; 2009-14; 2008-11; 2006-2; 2006-9; 2004-5; 2003-4; 2002-2; 2002-4; 2001-3; 1994-5; 1990-8; 1987-4; FB-38

RAZÕES E PROPORÇÕES: 2015-2; 2010-19; 2008-12; 2008-18; 2006-12; 2004-16; 2003-13; 2001-5; 2000-5; 1998-7; 1998-15; 1996-6; 1996-17; 1991-6; 1989-9; 1987-1; 1984-4; 1984-21

REGRA DE TRÊS: 2016-4; 1996-16; FB-9; FB-25; FB-30

PORCENTAGEM: 2009-10; 2009-15; 2007-4; 2004-6; 2001-16; 2000-19; 1997-2; 1995-3; 1992-20; 1985-6

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS E REGRA DE SOCIEDADE: 2008-14; 2007-10; 2005-14; 1986-11; 1985-11

OPERAÇÕES COM MERCADORIAS: 2011-10; 2006-19; 2003-15; 2001-11; 1998-6; 1997-4; 1996-12; 1994-16; 1990-16; 1989-8; 1986-6

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS: 2008-4; 2006-15; 1999-8; 1995-8; 1994-3; 1991-7; 1990-6; 1988-4

MISTURAS: 2013-13; 2010-7; 2002-7; 1999-3; 1987-3; FB-39

MÉDIAS: 2016-5; 2007-19; 2002-9; 2001-9; 1995-14; 1990-10; 1985-25; 1984-3

CONTAGEM E CALENDÁRIO: 2014-3; 2014-11; 2008-9; 2003-1; 2003-9; 1997-5; 1992-5; 1987-9

PROBLEMAS TIPO TORNEIRA: 2008-16; 2007-3; 2006-14; 1994-10; 1985-3; FB-37

SISTEMA MÉTRICO: 1997-10; 1996-10; 1994-13; 1989-13; 1986-13; 1985-23

ÁLGEBRA

POTÊNCIAS E RAÍZES: 2016-11; 2015-10; 2014-7; 2013-1; 2013-19; 2012-7; 2012-16; 2010-18; 2009-8; 2007-7; 2005-9; 2004-11; 2004-14; 2001-4; 2001-13; 2001-14; 2000-6; 2000-9; 2000-11; 1999-5; 1998-16; 1997-15; 1995-12; 1991-5; 1990-2; 1989-5; 1988-7; 1987-16; 1987-24; 1986-7; 1985-2; 1985-15; 1984-5; 1984-6; 1984-15; FB-3

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO: 2015-1; 2015-18; 2013-16; 2012-3; 2012-4; 2009-12; 2008-1; 2008-3; 2007-8; 2007-9; 2007-12; 2006-16; 2005-12; 2005-15; 2001-7; 1999-12; 1998-10; 1998-14; 1996-3; 1996-15; 1994-19; 1992-8; 1991-13; 1989-10; 1988-14; 1987-17; 1986-16; 1985-8; 1984-12; FB-8; FB-33

RACIONALIZAÇÃO E RADICAL DUPLO: 2013-17; 2012-13; 2009-19; 2005-11; 2003-3; 2002-5; 1999-2; 1997-18; 1994-8; 1991-10; 1990-14; 1989-11; 1988-6; 1987-5; 1986-9; FB-10; FB-14

EQUAÇÃO DO 2° GRAU: 2015-11; 2014-12; 2010-6; 2009-20; 2008-8; 2005-3; 2005-19; 2004-12; 2002-15; 2000-15; 1999-20; 1996-4; 1995-2; 1995-15; 1991-12; 1990-4; 1989-7; 1988-8; 1988-11; 1987-20; 1986-3; 1985-4; 1985-17; 1984-10; FB-11; FB-17; FB-28; FB-29; FB-32

FUNÇÃO QUADRÁTICA: 2010-12; 2009-16; 2007-14; 2006-6; 2005-17; 2003-10; 2003-14; 1999-18; 1998-19; 1994-2; 1990-18; 1989-17; 1988-13; 1987-21; 1985-13; 1984-8; FB-36

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS: 2013-10; 2012-2; 2011-20; 2009-3; 2002-17; 1992-12;

EQUAÇÕES BIQUADRADAS E REDUTÍVEIS AO 2° GRAU: 2014-5; 2008-10; 2006-20; 2004-15; 2002-19; 2000-17; 1998-3; 1998-8; 1997-14; 1995-17; 1995-20; 1994-15; 1992-10; 1992-11; 1992-16; 1992-18; 1986-15; 1985-10

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES IRRACIONAIS: 2015-3; 2014-9; 2012-5; 2011-12; 2009-7; 2007-13; 2004-2; 2003-16; 1997-7; 1995-7; 1991-8; 1989-12; 1984-11; FB-24; FB-34; FB-40

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: 2016-9; 2015-16; 2013-14; 2011-2; 2011-13; 2005-4; 2004-19; 1995-4; 1990-20; 1988-12; 1987-14; 1987-25; 1986-8; 1986-10; 1986-14; 1985-19; 1984-13

SEQUÊNCIAS: 2012-12;

FUNÇÃO DO 1° GRAU: 2012-17; 2003-19; 1986-12

EQUAÇÃO DO 1° GRAU E PROBLEMAS DO 1º GRAU: 2015-15; 2002-18; 2000-7; 2000-10; 1998-4; 1997-1; 1994-14; 1990-7; 1984-16; FB-15

SISTEMAS LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2016-2; 2015-12; 2010-4; 2009-1; 2007-1; 2006-11; 2004-1; 2004-17; 2003-8; 2002-3; 2001-18; 2000-16; 1999-11; 1999-17; 1997-17; 1995-11; 1994-12; 1992-17; 1989-4; 1989-15; 1988-10; 1985-9; 1985-22; 1984-14

SISTEMAS NÃO LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2014-18; 2011-15; 2011-16; 2011-18; 2009-2; 2007-16; 2003-5; 1991-9; 1990-19; 1989-6; 1988-9; 1986-5; 1984-9; FB-31

INEQUAÇÕES: 2011-17; 2003-2; 1997-12; 1995-9; 1994-18;

INEQUAÇÕES PRODUTO QUOCIENTE: 2016-1; 2014-20; 2010-9; 2006-8; 2005-6; 1998-18; 1991-11; 1990-3; 1989-20; 1987-8; 1987-13; 1986-21; 1984-17; FB-6

DESIGUALDADES: 2011-19;

GEOMETRIA PLANA

FUNDAMENTOS E ÂNGULOS: 2008-2

TRIÂNGULOS – ÂNGULOS, CONGRUÊNCIA, DESIGUALDADES: 2013-20; 2006-1; 2002-12; 2001-17; 2001-20; 2000-12; 2000-20; 1999-19; 1998-12; 1997-19; 1996-1; 1995-19; 1991-16; 1986-18; 1985-7

TRIÂNGULOS – PONTOS NOTÁVEIS: 2016-13; 2014-13; 2014-14; 2011-14; 2010-11; 2004-3; 1999-1; 1997-13; 1996-7; 1995-5;

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS: 2016-6; 2014-8; 2009-17; 2006-17; 2005-18; 1999-16; 1996-9; 1994-4; 1992-7; 1989-1;

TRIÂNGULOS – SEMELHANÇA E RELAÇÕES MÉTRICAS: 2015-6; 2015-17; 2010-10; 2008-7; 2006-18; 2004-10; 2004-20; 1999-9; 1999-14; 1998-2; 1992-19; 1990-1; 1989-16; 1988-15; 1987-12; 1987-22; 1986-22; 1986-25; 1985-12; 1984-22; FB-4; FB-19

QUADRILÁTEROS: 2013-3; 2013-5; 2012-8; 2011-9; 2010-17; 2009-6; 2007-5; 2005-5; 2004-13; 2001-2; 1997-20; 1995-1; 1992-9; 1989-3; 1988-20; 1986-19; 1986-20; 1985-21; FB-20

POLÍGONOS – ÂNGULOS E DIAGONAIS: 2012-18; 2006-7; 2006-13; 2001-10; 1998-11; 1997-6; 1995-10; 1994-7; 1991-14; 1990-5; 1988-18; 1987-11; 1985-5; 1985-16; FB-2; FB-18

POLÍGONOS – RELAÇÕES MÉTRICAS: 2007-2; 2006-4; 2006-10; 2004-18; 2000-13; 1999-6; 1996-5; 1994-1; 1991-18; 1990-12; 1986-23

CIRCUNFERÊNCIA – POSIÇÕES RELATIVAS E SEGMENTOS TANGENTES: 2011-6; 2010-1; 2009-9; 2008-17; 2007-18; 2004-7; 2003-7; 1999-13; 1996-13; 1994-17; 1991-15; 1986-17; FB-22

ARCO CAPAZ, ÂNGULOS E COMPRIMENTOS NA CIRCUNFERÊNCIA: 2016-7; 2014-6; 2014-15; 2012-9; 2010-16; 2009-5; 2008-6; 2003-6; 2003-17; 2001-12; 2000-18; 1997-8; 1992-3; 1991-19; 1988-17; 1987-18; 1984-20

CIRCUNFERÊNCIA – RELAÇÕES MÉTRICAS E POTÊNCIA DE PONTO: 2005-20; 2003-11; 2002-20; 1998-1; 1998-5; 1996-8; 1995-13; 1990-15; 1989-19; 1984-18; 1984-23; FB-21; FB-26; FB-27

ÁREAS: 2016-8; 2016-14; 2016-15; 2016-16; 2016-20; 2015-4; 2015-5; 2015-13; 2015-19; 2015-20; 2014-2; 2014-16; 2013-9; 2012-6; 2012-19; 2011-1; 2011-3; 2011-7; 2010-2; 2010-20; 2009-11; 2008-13; 2008-19; 2007-15; 2007-20; 2006-5; 2005-1; 2005-7; 2005-8; 2003-12; 2003-20; 2002-1; 2002-8; 2002-10; 2002-13; 2002-16; 2001-8; 2000-1; 2000-2; 2000-8; 2000-14; 1999-7; 1998-13; 1997-9; 1997-16; 1996-2; 1995-6; 1994-6; 1992-2; 1992-5; 1991-17; 1991-20; 1990-13; 1990-17; 1989-2; 1989-18; 1988-16; 1988-19; 1987-10; 1987-15; 1987-19; 1987-23; 1986-24; 1985-14; 1985-20; 1985-24; 1984-19; 1984-24; 1984-25; FB-1; FB-5; FB-35

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1995/1996

1) Sejam os triângulos ABC e MPQ, tais que:

I - $M\hat{P}Q = A\hat{C}B = 90^\circ$

II - $P\hat{Q}M = 70^\circ$

III - $B\hat{A}C = 50^\circ$

IV - $\overline{AC} = \overline{MP}$

Se $\overline{PQ} = x$ e $\overline{BC} = y$, então $\overline{AB}$ é igual a:

(A) $x + y$

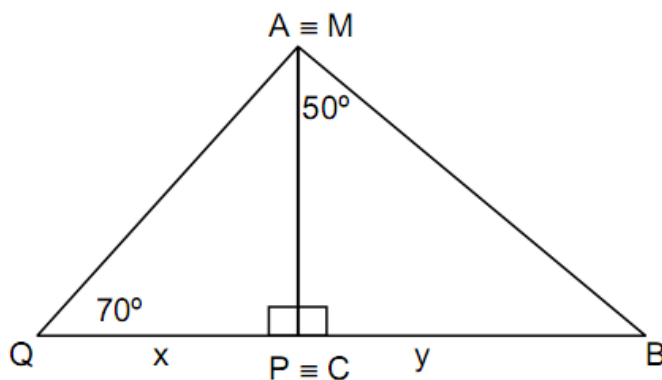
(B) $\sqrt{x^2 + y^2}$

(C) $\dfrac{2xy}{(x+y)^2}$

(D) $\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y}$

(E) $2x + y$

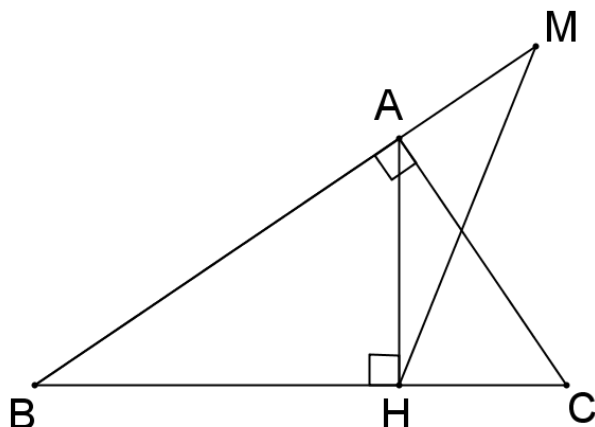
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Como $\overline{AC} = \overline{MP}$ e $M\hat{P}Q = A\hat{C}B = 90^\circ$, podemos representar os dois triângulos como na figura acima.

$Q\hat{A}P = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

$Q\hat{M}B = Q\hat{A}P + B\hat{A}C = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$

Logo, $Q\hat{M}B = B\hat{Q}M = 70^\circ \Rightarrow \Delta BQM$ é isósceles $\Rightarrow AB = BQ = BC + CQ = x + y$.

2) No triângulo ABC, retângulo em A, da figura, $AB = c$, $AC = b$, $AM = 2$ e AH é a altura relativa ao lado BC. Qual é a área do triângulo AHM?

(A) $\frac{bc}{b^2+c^2}$

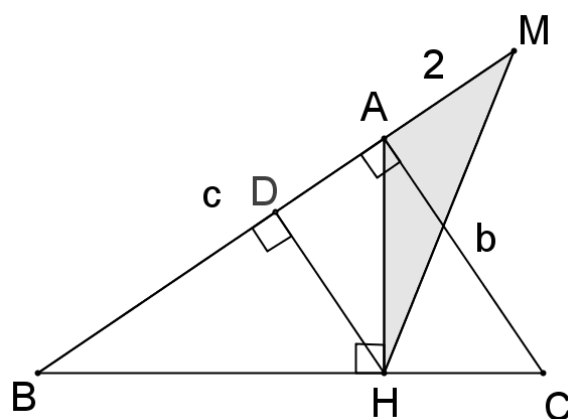
(B) $\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$

(C) $\frac{bc^2}{b^2+c^2}$

(D) $\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$

(E) $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Seja $HD \perp AB$, então $S_{AHM} = \frac{AM \cdot HD}{2}$.

No triângulo retângulo ABC, temos:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{b^2+c^2}$

$$HA \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow HA = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$AB^2 = BC \cdot HB \Leftrightarrow HB = \frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

No triângulo retângulo ABH, temos:

$$HD \cdot AB = HA \cdot HB \Rightarrow HD = \frac{\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}}{c} = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$$

Portanto, a área do ΔAHM é $S_{AHM} = \frac{AM \cdot HD}{2} = \frac{2 \cdot \frac{bc^2}{b^2+c^2}}{2} = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$ unidades de área.

3) O quociente da divisão de $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ por $(a+b)\left[c^2 + c(a+b) + ab\right]$ é:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = \left[(a+b+c)^3 - c^3\right] - \left(a^3 + b^3\right) =$$
$$= (a+b+c-c)\left[(a+b+c)^2 + c(a+b+c) + c^2\right] - (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) =$$
$$= (a+b)\left[(a+b+c)^2 + c(a+b+c) + c^2 - a^2 + ab - b^2\right] =$$
$$= (a+b)\left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + ac + bc + c^2 + c^2 - a^2 + ab - b^2\right) =$$
$$= (a+b)\left(3c^2 + 3ac + 3bc + 3ab\right) = 3(a+b)\left[c^2 + c(a+b) + ab\right]$$
$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3}{(a+b)\left[c^2 + c(a+b) + ab\right]} = 3$$

4) Considere a equação do 2° grau em x tal que $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com "a" diferente de zero. Sabendo que 2 e 3 são as raízes dessa equação, podemos afirmar que:

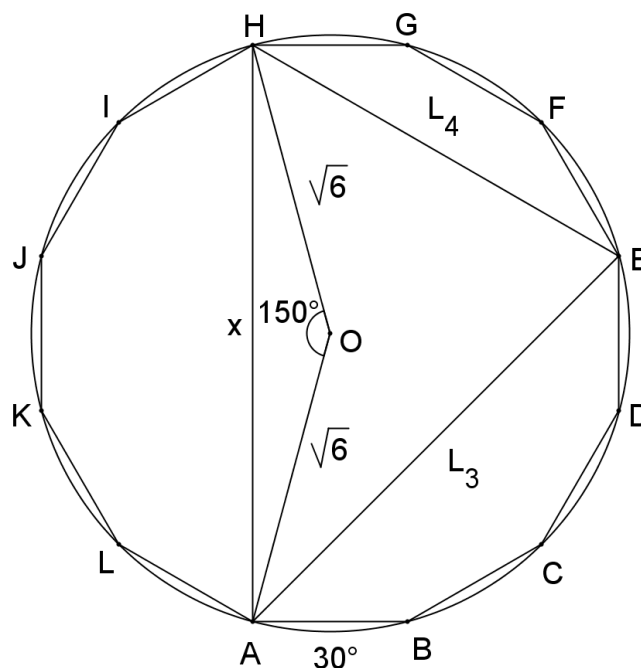
(A) $13a + 5b + 2c = 0$.
(B) $9a + 3b - c = 0$.
(C) $4a - 2b = 0$.
(D) $5a - b = 0$.
(E) $36a + 6b + c = 0$.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Se 2 e 3 são raízes de $ax^2+bx+c=0$, então:
$a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=0 \Leftrightarrow 4a+2b+c=0$ e $a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=0 \Leftrightarrow 9a+3b+c=0$.
Somando as duas igualdades, temos: $(4a+2b+c)+(9a+3b+c)=0 \Leftrightarrow 13a+5b+2c=0$.

5) Sejam ABCDEFGHIJKL os vértices consecutivos de um dodecágono regular inscrito num círculo de raio $\sqrt{6}$. O perímetro do triângulo de vértices AEH é igual a:
(A) $3[3+\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.
(B) $3[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.
(C) $3[1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.
(D) $3[2+\sqrt{2}+3\sqrt{3}]$.
(E) $3[1-\sqrt{2}+2\sqrt{3}]$.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O dodecácono regular determina arcos de $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$ sobre o círculo circunscrito de centro O e raio $R=\sqrt{6}$.
$AE=4\cdot 30^\circ=120^\circ \Rightarrow AE=L_3=R\sqrt{3}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{2}$
$EH=3\cdot 30^\circ=90^\circ \Rightarrow EH=L_4=R\sqrt{2}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{3}$
Aplicando a lei dos cossenos no ΔAOH, então

$AH^2 = AO^2 + AH^2 - 2 \cdot AO \cdot AH \cdot \cos 150^\circ \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12 + 6\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2 = 3\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 3\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} + 3$

Logo, o perímetro do ΔAEH é

$2p_{AEH} = AE + EH + AH = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3} + 3\right) = 3\left[1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right]$ u.c..

6) Sabendo-se que a velocidade para rebobinar uma fita de vídeo é $\frac{52}{3}$ da normal, qual o tempo gasto para rebobinar uma fita de um filme de 156 minutos?

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O tempo para rebobinar a fita é inversamente proporcional à velocidade.
Sejam V_N a velocidade normal de exibição na qual o filme demora $t_N = 156$ min e, V_R e t_R, respectivamente, a velocidade e o tempo para rebobinar essa fita, então temos:

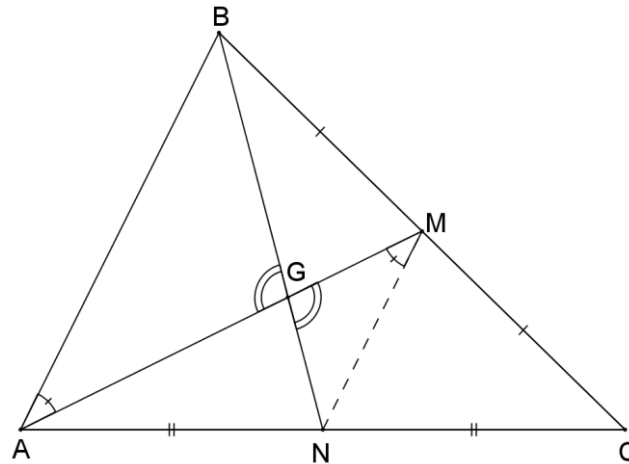
$\frac{V_R}{V_N} = \frac{t_N}{t_R} \Rightarrow \frac{52}{3} = \frac{156}{t_R} \Leftrightarrow t_R = \frac{156}{52/3} = 9$ min .

7) Considere as afirmativas sobre o triângulo ABC:
I − Os vértices B e C são equidistantes da mediana AM, M é o ponto médio do segmento BC;
II − A distância do baricentro G ao vértice B é o dobro da distância de G ao ponto N, médio do segmento AC;
III − O incentro I é equidistante dos lados do triângulo ABC;
IV − O circuncentro S é equidistante dos vértices A, B e C.
O número de afirmativas verdadeiras é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
I – FALSA
A mediana AM é a ceviana que liga o vértice A ao ponto médio do lado oposto M. Assim, pode-se dizer que B e C são equidistantes do ponto M, mas não da mediana AM.

II – VERDADEIRA

O segmento MN é uma base média do ΔABC, então $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{AB}{2}$.

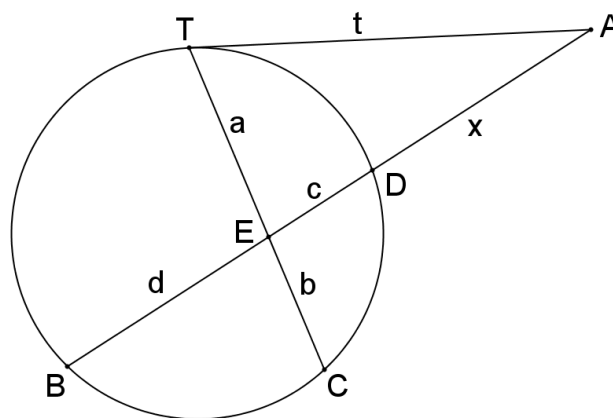
$MN \parallel AB \Rightarrow \Delta GMN \sim \Delta GAB \Rightarrow \frac{GN}{BG} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BG = 2 \cdot GN$.

III − VERDADEIRA

O incentro I é o ponto de encontro das bissetrizes internas do ΔABC. Como a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos lados desse ângulo, então cada bissetriz interna do ΔABC equidista de dois lados adjacentes e, consequentemente, o ponto de encontro das bissetrizes é único e equidista dos três lados do ΔABC. Por isso, o incentro I é o centro do círculo inscrito ao ΔABC.

IV − VERDADEIRA

O circuncentro S é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados do ΔABC. Como a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes das extremidades do segmento, então cada mediatriz equidista de dois vértices do ΔABC e, consequentemente, o ponto de encontro das mediatrizes é único e equidista dos três vértices do ΔABC. Por isso, o circuncentro S é o centro do círculo circunscrito ao ΔABC.

8) Na figura, AT é tangente ao círculo, TC e BD são as cordas que se interceptam no ponto E. Sabe-se que existe a relação $c^2 + d^2 + 2ab + 4t^2 = 4(c+d)^2$. O valor de x é:

(A) $\frac{c+d}{2}$

(B) $\frac{c+d}{3}$

(C) $\frac{2c+d}{4}$

(D) $\frac{c+2d}{8}$

(E) $\frac{3c+4d}{6}$

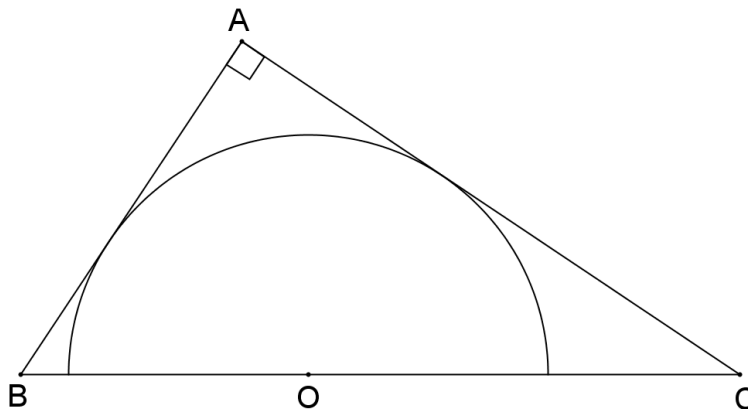
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Potência do ponto A em relação ao círculo: $AT^2 = AB \cdot AD \Rightarrow t^2 = (x+c+d) \cdot x$
Potência do ponto E em relação ao círculo: $TE \cdot EC = BE \cdot ED \Rightarrow a \cdot b = c \cdot d$
Substituindo as expressões obtidas acima na relação dada no enunciado, temos:

$$c^2 + d^2 + 2ab + 4t^2 = 4(c+d)^2 \Rightarrow c^2 + d^2 + 2cd + 4x \cdot (x+c+d) = 4(c+d)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4(c+d)x - 3(c+d)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}(c+d) \text{ ou } x = \frac{1}{2} \cdot (c+d)$$

$$x > 0 \Rightarrow x = \frac{c+d}{2}$$

9) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, o ponto O é o centro do semicírculo de raio r, tangente aos lados AB e AC. Sabendo-se que $OB = r\sqrt{3}$, a área do triângulo ABC é dada por:

(A) $\frac{r^2}{3}\left(2\sqrt{2}+4\right)$

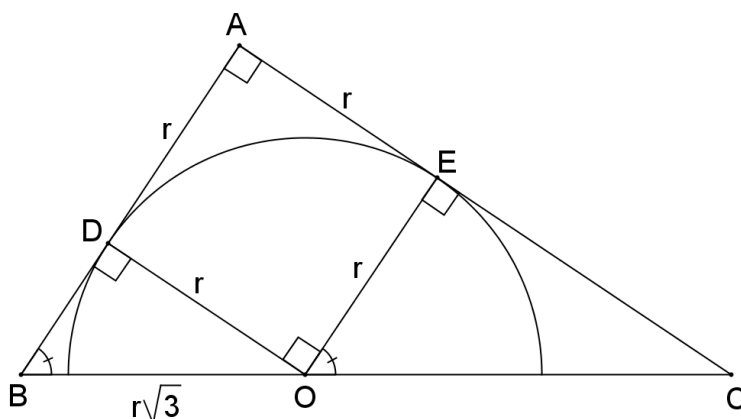
(B) $\frac{r^2}{4}\left(2\sqrt{3}+4\right)$

(C) $\frac{r^2}{4}\left(3\sqrt{2}+2\right)$

(D) $\frac{r^2}{4}(3\sqrt{2}+4)$

(E) $\frac{r^2}{3}(4\sqrt{3}+4)$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Sejam D e E os pontos em que o semicírculo tangencia os lados AB e AC, respectivamente, então $OD \perp AB$ e $OE \perp AC$.

O quadrilátero $ABCD$ possui quatro ângulos retos e dois lados $OD = OE = r$, portanto, $\#ABCD$ é um quadrado e $AD = AE = r$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔBDO: $BD^2 + r^2 = (r\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow BD = r\sqrt{2}$.

$OE \parallel AB \Rightarrow O\hat{B}D = C\hat{O}E \Rightarrow \Delta BDO \sim \Delta CEO \Rightarrow \frac{DO}{EC} = \frac{BD}{OE} \Leftrightarrow \frac{r}{EC} = \frac{r\sqrt{2}}{r} \Leftrightarrow EC = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

Os catetos do ΔABC são $AB = AD + BD = r + r\sqrt{2} = r(1+\sqrt{2})$ e $AC = AE + EC = r + \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{2}(2+\sqrt{2})$.

A área do triângulo retângulo ABC é dada por:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{r(1+\sqrt{2}) \cdot \frac{r}{2}(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{r^2}{4}(4+3\sqrt{2}) \text{ u.a.}.$$

10) Num depósito estão guardadas 300 folhas de compensado de espessura $5,0\text{ mm}$ e $1,5\text{ cm}$, respectivamente, formando uma pilha com $2,35\text{ m}$ de altura. Qual é a soma dos algarismos do número que expressa a quantidade de folhas?

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Supondo que haja x folhas de $5,0\text{ mm}$ e $(300-x)$ folhas de $1,5\text{ cm}=15\text{ mm}$, então a altura $2,35\text{ m}=2350\text{ mm}$ é dada por
$5\cdot x+15\cdot(300-x)=2350\Leftrightarrow 5x+4500-15x=2350\Leftrightarrow 10x=2150\Leftrightarrow x=215$
Logo, a quantidade de folhas $5,0\text{ mm}$ é 215 e a soma de seus algarismos é $2+1+5=8$.

11) Quantos valores de $K\in\mathbb{Z}$ existem tais que $\dfrac{113\cdot K+7}{K+1}$ é um número inteiro?
(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
$$\frac{113\cdot K+7}{K+1}=\frac{113(K+1)-106}{K+1}=113-\frac{106}{K+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{106}{K+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(K+1)|106$$
Logo, o número de valores de K é igual ao número de divisores de 106.
A fatoração de 106 em fatores primos é $106=2\cdot 53$. Assim, a sua quantidade de divisores inteiros é $2\cdot(1+1)\cdot(1+1)=8$.
Note que foi necessário multiplicar por 2, para obtermos a quantidade de divisores positivos e de negativos.

12) Um comerciante aumentou o preço de uma mercadoria em 25%. Contudo a procura por essa mercadoria continuou grande. Então ele fez um novo aumento de 10%. Como o preço ficou muito alto, a mercadoria encalhou e, além disso, o prazo de validade estava vencendo. Finalmente fez um desconto para que o preço voltasse no valor inicial. Esse último desconto:
(A) foi de 35%.
(B) ficou entre 30% e 35%.
(C) ficou entre 27% e 28%.
(D) foi de 25%.
(E) ficou entre 22% e 25%.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Seja P o preço inicial.
O preço após o aumento de 25% é $P\cdot(100\%+25\%)=1,25\cdot P$.
O preço após o novo aumento de 10% é $1,25P\cdot(100\%+10\%)=1,25P\cdot 1,1=1,375P$.

O desconto para que o preço volte ao valor inicial deve ser de $0,375P$ que equivale a $\frac{0,375P}{1,375P}=\frac{3}{11}=\frac{27}{99}=0,272727\ldots\approx 27,27\%$

Logo, o último desconto ficou entre 27% e 28%.

13) Sejam C_1 e C_2 dois círculos ortogonais de raios R_1 e R_2. A distância entre os centros é π. A soma das áreas dos círculos é igual a:

(A) $\frac{3\pi^2}{2}$.

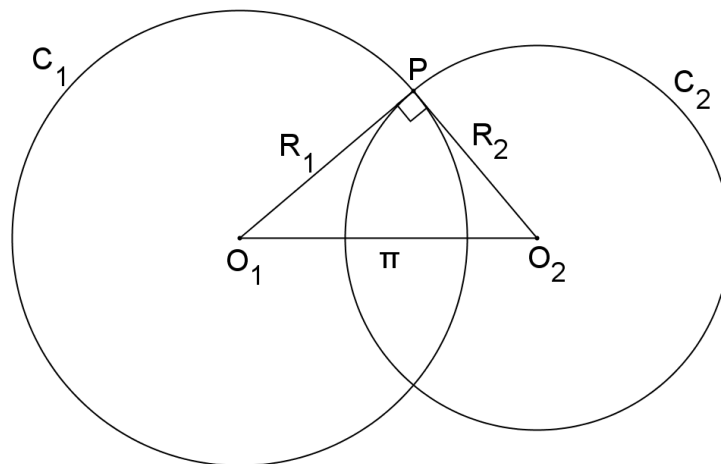
(B) $\frac{\pi^2}{4}$.

(C) π^2.

(D) π^3.

(E) $\frac{5\pi^2}{4}$.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.

Dois círculos são ditos ortogonais se as tangentes aos círculos nos pontos de interseção são perpendiculares. Consequentemente, os raios que se encontram no ponto de interseção também serão perpendiculares e, portanto, o triângulo O_1PO_2 é retângulo.

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔO_1PO_2, temos: $O_1P^2+O_2P^2=O_1O_2^2 \Leftrightarrow R_1^2+R_2^2=\pi^2$.

Assim, a soma das áreas dos círculos é $S_{C_1}+S_{C_2}=\pi R_1^2+\pi R_2^2=\pi\left(R_1^2+R_2^2\right)=\pi\cdot\pi^2=\pi^3$ u.a..

14) Dadas as operações: $x*y=x+y$, $x\#y=x-y$ e $x\Delta y=x^y$; o valor da expressão $[2*(8\#12)]*\{[(3*2)\#5]\Delta[10*(2\#(4\Delta 2))]\}$

(A) não é real
(B) é igual a -1
(C) é igual a -2
(D) é igual a -3
(E) é igual a -4

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$[2*(8\#12)]*\{[(3*2)\#5]\Delta[10*(2\#(4\Delta 2))]\}=[2*(8-12)]*\{[(3+2)\#5]\Delta[10*(2\#(4^2))]\}=$$
$$=[2*(-4)]*\{[5\#5]\Delta[10*(2\#16)]\}=[2+(-4)]*\{[5-5]\Delta[10*(2-16)]\}=$$
$$=[-2]*\{0\Delta[10*(-14)]\}=[-2]*\{0\Delta[10+(-14)]\}=[-2]+\{0\Delta[-4]\}=[-2]+\{0^{-4}\}$$

Observe que $0^{-4}=\frac{1}{0^4}$ não está definido, logo não é um número real.

Portanto, $[2*(8\#12)]*\{[(3*2)\#5]\Delta[10*(2\#(4\Delta 2))]\}=[-2]+\{0^{-4}\}$ não é um número real.

15) Dadas as afirmativas a seguir:

1) $x^5-1\equiv(x^2-1)(x+1)(x-1)$
2) $x^5-1\equiv(x-1)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)$
3) $x^5-1\equiv(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
4) $x^5-1\equiv(x^3+1)(x^2-1)$
5) $x^5-1\equiv(x-1)(x+1)(x-1)(x+1)(x-1)$

Quantas são verdadeiras?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Inicialmente cabe observar que dois polinômios idênticos possuem o mesmo grau, os mesmos coeficientes e o mesmo valor numérico para qualquer valor da variável x.

1) FALSA

$$(x^2-1)(x+1)(x-1)=(x^2-1)(x^2-1)=x^4-2x^2+1\not\equiv x^5-1$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

Outra maneira de concluir que os polinômios não são idênticos é observar que a igualdade não se verifica para algum valor de x.

$x=2 \Rightarrow 2^5-1=31 \neq 9=(2^2-1)(2+1)(2-1)$

2) VERDADEIRA

$$(x-1)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)=(x-1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1-\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\left(x^2+\frac{x}{2}+1+\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)=$$

$$=(x-1)\left[\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2\right]=(x-1)\left(x^4+\frac{x^2}{4}+1+2x^2\cdot\frac{x}{2}+2x^2\cdot 1+2\frac{x}{2}\cdot 1-\frac{5}{4}x^2\right)=$$

$$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$$

3) VERDADEIRA

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$

Basta multiplicar usando a distributividade ou lembrar da fatoração:

$\forall n \in \mathbb{N}:\ a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$

4) FALSA

$(x^3+1)(x^2-1)=x^5-x^3+x^2-1 \not\equiv x^5-1$

Outra maneira de concluir que os polinômios não são idênticos é observar que a igualdade não se verifica para algum valor de x.

$x=2 \Rightarrow 2^5-1=31 \neq 27=(2^3+1)(2^2-1)$

5) FALSA

$(x-1)(x+1)(x-1)(x+1)(x-1)=(x^2-1)(x^2-1)(x-1)=(x^4-2x^2+1)(x-1)=$

$=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1 \not\equiv x^5-1$

Outra maneira de concluir que os polinômios não são idênticos é observar que a igualdade não se verifica para algum valor de x.

$x=2 \Rightarrow 2^5-1=31 \neq 9=(2-1)(2+1)(2-1)(2+1)(2-1)$

16) Se K abelhas, trabalhando K meses do ano, durante K dias do mês e durante K horas por dia, produzem K litros de mel; então o número de litros de mel produzidos por W abelhas, trabalhando W horas por dia, em W dias e em W meses do ano será:

(A) $\frac{K^3}{W^2}$

(B) $\frac{W^5}{K^3}$

(C) $\frac{K^4}{W^3}$

(D) $\frac{W^3}{K^3}$

(E) $\frac{W^4}{K^3}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Vamos dispor as grandezas na tabela abaixo e analisar se cada uma das grandezas é diretamente ou inversamente proporcional à quantidade de litros de mel produzidos.

Abelhas	Meses	Dias	h/dia	Litros de mel
K	K	K	K	K
W	W	W	W	X
dir. prop.	dir. prop.	dir. prop.	dir. prop.	

$$\Rightarrow \frac{X}{K} = \frac{W}{K} \cdot \frac{W}{K} \cdot \frac{W}{K} \cdot \frac{W}{K} \Leftrightarrow X = \frac{W^4}{K^3}$$

NOTA 1: REGRA DE TRÊS

Problemas de **regra de três s**ão problemas que envolvem grandezas direta ou inversamente proporcionais. As regras de três que envolvem apenas duas grandezas são ditas **simples** e as que envolvem mais de duas grandezas, **compostas**.

Para se resolver um problema de regra de três composta, deve-se verificar se cada uma das grandezas é diretamente ou inversamente proporcional à grandeza em análise. A razão entre os valores da grandeza em análise em duas situações é igual ao produto das razões das outras grandezas nessas duas situações, sendo que as razões das grandezas inversamente proporcionais devem ser invertidas.

Isso vai ficar mais claro com a análise do exemplo 2 a seguir e do item sobre a interpretação funcional da proporcionalidade.

Exemplos
1) Se R$ 100,00 em um certo tempo dá-nos R$ 8,00 de rendimento, quanto renderá R$ 250,00 nesse mesmo tempo?
RESPOSTA: R$ 20,00
Como capital e rendimento são diretamente proporcionais, temos:

$$\frac{100}{250} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \frac{250 \cdot 8}{100} = 20$$

2) Dez operários fazem 150 m de uma construção em 18 dias de 8 horas de serviço. Quantos dias levarão 20 operários trabalhando 6 horas por dia para fazer 187,5 metros dessa obra?
RESPOSTA: 15 dias

Qtd operários	comp. obra	no. dias	horas/dia
10	150	18	8
20	187,5	x	6
INV	DIR		INV

Comparando cada uma das grandezas com a quantidade de dias chegamos às relações de proporcionalidade indicadas acima.

$$\frac{18}{x}=\frac{20}{10}\cdot\frac{150}{187,5}\cdot\frac{6}{8}\Leftrightarrow x=15$$

Interpretação funcional da proporcionalidade

A função $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ é uma **proporcionalidade** quando $f(x)=a\cdot x$, onde $a=f(1)$. Diz-se que x e $f(x)$ são diretamente proporcionais. Por exemplo, o peso e o volume de um corpo são diretamente proporcionais.

A função $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+$ é uma **proporcionalidade inversa** quando $f(x)=\frac{a}{x}$, onde $a=f(1)$. Diz-se que x e $f(x)$ são inversamente proporcionais. Por exemplo, dentre os retângulos de mesma área, a base e a altura são inversamente proporcionais.

Uma grandeza pode ser diretamente proporcional a várias grandezas e inversamente proporcional a outras. Se uma grandeza z é diretamente proporcional a x e y, e inversamente proporcional a u, v e w, pode-se relacionar as grandezas da seguinte forma: $z=f(x,y,u,v,w)=a\cdot\frac{xy}{uvw}$. Por exemplo, a Lei da gravitação universal de Newton afirma que dois corpos de massas m e m' distantes d se atraem segundo uma força F que é diretamente proporcional às massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância: $F=c\cdot\frac{mm'}{d^2}$, onde c é uma constante.

Exemplo
(CN 1978) Se 30 operários gastaram 18 dias, trabalhando 10 horas por dia, para abrir um canal de 25 metros, quantos dias de 12 horas de trabalho 10 operários, que têm o triplo da eficiência dos primeiros, gastarão para abrir um canal de 20 metros, sabendo-se que a dificuldade do primeiro está para a do segundo como 3 está para 5?
RESPOSTA: 20 dias
O problema deseja calcular uma quantidade de dias (d) sabendo a quantidade de operários (o), de horas por dia (h), comprimento do canal (c), a eficiência dos operários (e) e a dificuldade do canal (D). Estudando a relação de proporcionalidade entre as grandezas, pode-se escrever que $f=f(o,h,c,e,D)=k\cdot\frac{c\cdot D}{o\cdot h\cdot e}$.

$$\Rightarrow 18=f(30,10,25,1,3)=k\cdot\frac{25\cdot 3}{30\cdot 10\cdot 1}\Leftrightarrow k=72$$

$$\Rightarrow d=f(10,12,20,3,5)=72\cdot\frac{20\cdot 5}{10\cdot 12\cdot 3}=20$$

****

17) Os raios das rodas dos carros A, B e C, inscritos em uma corrida, são respectivamente iguais a x, $2x$ e $3x$. Quantos quilômetros, respectivamente, percorrerão os três carros, se desenvolverem uma velocidade de 80 km/h durante 4 horas?

(A) 320, 640 e 960
(B) 240, 640 e 960
(C) 320, 160 e 80
(D) 320, 320 e 320
(E) 640, 320 e 160

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que os raios das rodas não afetarão a distância percorrida pelos carros. Os raios das rodas seriam necessários, por exemplo, se quiséssemos calcular quantas voltas as rodas dão para uma determinada distância percorrida.
Lembrando que a velocidade média é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto, para cada um dos carros temos: $V_M = \frac{d}{t} \Rightarrow d = V_M \cdot t = 80 \cdot 4 = 320\text{ km}$. Portanto, os três carros percorrerão 320 km.
Note ainda que, como a velocidade média estava expressa em km/h, o tempo teria que estar expresso em horas.

18) Sabendo-se que o resultado de $12 \times 11 \times 10 \times ... \times 3 \times 2 \times 1 + 14$ é divisível por 13, qual o resto da divisão do número $13 \times 12 \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ por 169?

(A) 143.
(B) 149.
(C) 153.
(D) 156.
(E) 162.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Se $13 | (12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 14)$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que
$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 14 = 13k \Leftrightarrow 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 13(k-1) - 1$.
Multiplicando a última igualdade por 13, temos:
$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 169(k-1) - 13$.
Portanto, $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \equiv -13 \equiv 156 \pmod{169}$, ou seja, o resto da divisão de $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ por 169 é 156.

19) Sobre o número $\frac{1937}{8192}$ podemos afirmar que é:

(A) uma dízima periódica simples
(B) uma dízima periódica composta

(C) um decimal exato com 12 casas decimais
(D) um decimal exato com 13 casas decimais
(E) um decimal exato com 14 casas decimais

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Observemos inicialmente que a fração $\frac{1937}{8192}$ está na sua forma irredutível.

$$\frac{1937}{8192}=\frac{1937}{2^{13}}=\frac{1937\cdot 5^{13}}{2^{13}\cdot 5^{13}}=\frac{1937\cdot 5^{13}}{10^{13}}$$

Logo, a fração $\frac{1937}{8192}$ é um número decimal exato com 13 casas decimais.

20) Sejam A, B, C e D números naturais maiores que 1. Para que a igualdade $\frac{\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C}}{D}=\frac{B}{\frac{A}{\left(\frac{C}{D}\right)}}$, seja verdadeira é necessário que:

(A) $A^2=\frac{B^3C}{D}$
(B) $B^2C=AD$
(C) $A^4=B^4C^4$
(D) $\frac{A^2}{D^2}=\frac{B}{C}$
(E) $B^3=C^2$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

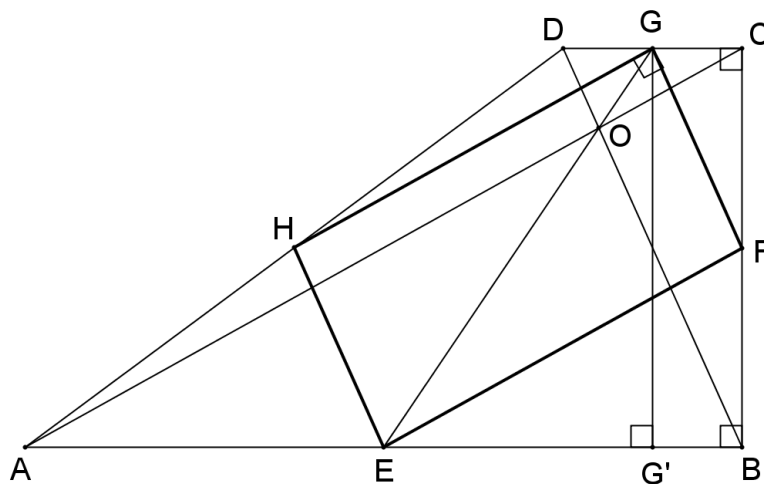
$$\frac{\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C}}{D}=\frac{B}{\frac{A}{\left(\frac{C}{D}\right)}}\Leftrightarrow\frac{\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{C}}{D}=\frac{B}{A\cdot\frac{D}{C}}\Leftrightarrow\frac{A}{BC}\cdot\frac{1}{\cancel{D}}=B\cdot\frac{C}{A\cancel{D}}\Leftrightarrow\frac{A}{BC}=\frac{BC}{A}\Leftrightarrow A^2=B^2C^2$$

Elevando ambos os membros ao quadrado: $A^4=B^4C^4$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1994/1995

1) Um retângulo é obtido unindo-se os pontos médios dos lados de um trapézio retângulo $ABCD$, de bases $AB = 32$ e $CD = 8$. A altura BC é igual a:
(A) 8
(B) 10
(C) 12
(D) 16
(E) 20

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados do trapézio retângulo $ABCD$ da figura.

$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel GH \parallel EF \text{ (bases médias)} \\ BD \parallel EH \parallel FG \text{ (bases médias)} \\ EF \perp FG \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp AC$$

Como $\Delta COD \sim \Delta AOB$, então as medianas EO e OG estão alinhadas.
A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da hipotenusa.
Portanto, $OG = \frac{CD}{2} = 4$, $OE = \frac{AB}{2} = 16$ e $GE = OG + OE = 4 + 16 = 20$.
Projetando o ponto G sobre a base maior AB, obtemos G' que forma o triângulo retângulo $GG'E$, onde $GG' = BC = h$ e $EG' = EB - G'B = EG - GC = 16 - 4 = 12$.
Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\Delta GG'E$, temos:
$GG'^2 + EG'^2 = GE^2 \Leftrightarrow h^2 + 12^2 = 20^2 \Leftrightarrow h^2 = 256 \Leftrightarrow h = 16$ unidades de comprimento.

2) O trinômio $y = x^2 - 14x + k$, onde k é uma constante real positiva, tem duas raízes reais distintas. A maior dessas raízes pode ser:
(A) 4
(B) 6
(C) 11
(D) 14
(E) 17

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Se o trinômio $y = x^2 - 14x + k$, tem duas raízes reais distintas, então seu discriminante (Δ) é positivo.
$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k > 0 \Leftrightarrow 4k < 196 \Leftrightarrow k < 49$
A soma das raízes do trinômio é $\frac{-(-14)}{1} = 14$.
Sejam as raízes do trinômio $r > s$, então $r + s = 14 \Rightarrow 2r > 14 \Leftrightarrow r > 7$.
Como r é raiz do trinômio, temos:
$r^2 - 14r + k = 0 \Leftrightarrow k = 14r - r^2$

$$0 < k < 49 \Rightarrow 0 < 14r - r^2 < 49 \Leftrightarrow \begin{cases} 14r - r^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < r < 14 \\ r^2 - 14r + 49 > 0 \Leftrightarrow r \neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < r < 7 \text{ ou } 7 < r < 14$$

Logo, a maior raiz do trinômio é r tal que $7 < r < 14$.
Observe que se 11 é a maior raiz do trinômio, então a menor é 3 e $k = 33$.

Esse problema também poderia ser resolvido inspecionando-se as opções e considerando que as raízes têm soma 14 e produto $k > 0$. Dessa forma, os pares ordenados de raízes resultantes seriam $(4,10)$; $(6,8)$; $(11,3)$; $(14,0)$ e $(17,-3)$. Nos dois primeiros pares a raiz que aparece na opção não é a maior raiz e nos dois últimos pares o produto das raízes não é positivo. Portanto, o único desses pares de raízes que satisfaz as condições do enunciado é $(11,3)$, cuja maior raiz é 11.

3) Seja P o produto de 3 números positivos. Se aumentarmos dois deles de 20% e diminuirmos o outro de 40%, teremos que P:
(A) não se altera.
(B) aumenta de $13,6\%$.
(C) aumenta de 10%.
(D) diminui de 10%.
(E) diminui de $13,6\%$.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ e $P = x \cdot y \cdot z$. Sejam P', x', y' e z' os valores após as alterações descritas no enunciado, então:

$x' = (1+20\%)\cdot x = 1,2x$
$y' = (1+20\%)\cdot y = 1,2y$
$z' = (1-40\%)\cdot z = 0,6z$
$P' = x'\cdot y'\cdot z' = (1,2x)\cdot(1,2y)\cdot(0,6z) = 0,864xyz = 0,864P$

A variação percentual do produto foi $\frac{P'-P}{P}\cdot 100\% = \frac{0,864P-P}{P}\cdot 100\% = -13,6\%$, ou seja, P diminui de $13,6\%$.

4) Sabendo-se que a seguinte identidade $\frac{a\cdot x+b\cdot y}{x\cdot y} = \frac{a}{y}+\frac{b}{x}$ é verdadeira para quaisquer números reais $a, b, x \neq 0$ e $y \neq 0$, o valor de

$$\frac{13}{2\cdot 4}+\frac{13}{4\cdot 6}+\frac{13}{6\cdot 8}+\cdots+\frac{13}{50\cdot 52}$$

é igual a:
(A) $\frac{25}{16}$
(B) $\frac{25}{12}$
(C) $\frac{25}{8}$
(D) $\frac{25}{4}$
(E) $\frac{25}{2}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
$$S = \frac{13}{2\cdot 4}+\frac{13}{4\cdot 6}+\frac{13}{6\cdot 8}+\cdots+\frac{13}{50\cdot 52} = \frac{13}{4}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{25\cdot 26}\right)$$

O termo geral da soma procurada é $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Assim, temos:

$$S = \frac{13}{4}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{25}}-\frac{1}{26}\right) = \frac{13}{4}\left(1-\frac{1}{26}\right) = \frac{13}{4}\cdot\frac{25}{26} = \frac{25}{8}$$

Note que a expressão do termo geral como diferença de duas frações poderia ser encontrada utilizando identidade de polinômios, da seguinte forma

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+1} \Leftrightarrow 1 = a(n+1)+bn \Leftrightarrow 1 = (a+b)n+a \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) = (1,-1)$$

Portanto, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

As somas como a acima são comumente chamadas somas telescópicas, pois ocorre a simplificação de todas as parcelas exceto a primeira e a última.

5) A que distância do vértice de um triângulo equilátero de lado igual 6 cm deve-se traçar uma reta paralela à base, de forma que o quadrilátero assim obtido seja circunscritível?

(A) $\sqrt{3} \text{ cm}$

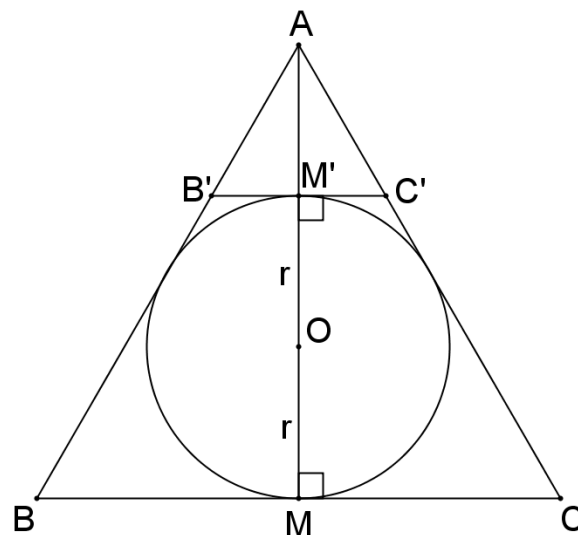
(B) $2\sqrt{3} \text{ cm}$

(C) $3\sqrt{3} \text{ cm}$

(D) $4\sqrt{3} \text{ cm}$

(E) $5\sqrt{3} \text{ cm}$

RESPOSTA: A

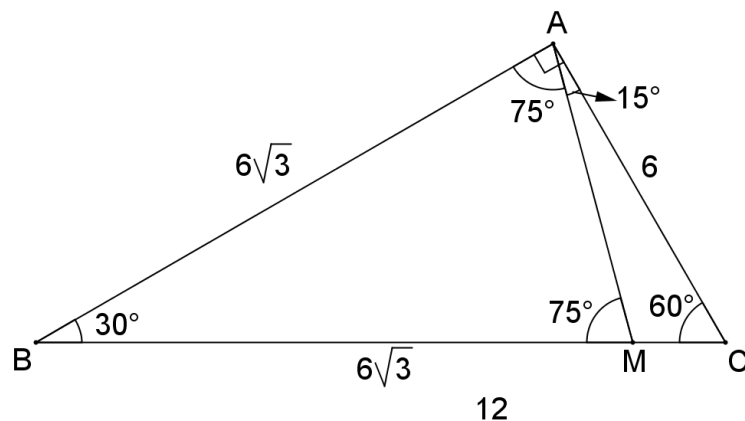
RESOLUÇÃO:
A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado.

Para que o $\#BCC'B'$ seja circunscritível basta que o segmento $B'C' \parallel BC$ seja tangente ao círculo inscrito ao triângulo equilátero ABC.
O ponto O centro do círculo inscrito é também baricentro do triângulo equilátero, então $AO = 2 \cdot OM \Leftrightarrow AM' + M'O = 2 \cdot OM \Leftrightarrow AM' + OM = 2 \cdot OM \Leftrightarrow AM' = OM = \frac{1}{3} \cdot AM$.

Portanto, $AM' = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$, onde utilizamos que a altura do triângulo equilátero é obtida multiplicando seu lado por $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6) Em um triângulo de vértices A, B e C, retângulo em A, os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente $6\sqrt{3} \text{ cm}$ e 6 cm. Traça-se o segmento $\overline{AM}$, com M pertencente e interno ao segmento $\overline{BC}$. Sabendo-se que o ângulo $M\hat{A}C$ mede 15°, a razão entre as áreas dos triângulos AMC e ABC é:

(A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
(C) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$
(D) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$
(E) impossível de se determinar com apenas esses dados.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC, temos:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (6\sqrt{3})^2 + 6^2 = 144 \Leftrightarrow BC = 12$.
No ΔABC, temos: $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$ e $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
$B\hat{A}M = B\hat{A}C - M\hat{A}C = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$
$B\hat{M}A = M\hat{C}A + M\hat{A}C = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$
$B\hat{A}M = B\hat{M}A = 75^\circ \Rightarrow \Delta BAM$ é isósceles $\Rightarrow BM = BA = 6\sqrt{3}$
$MC = BC - BM = 12 - 6\sqrt{3}$
Os triângulos AMC e ABC possuem altura comum, então a razão entre as suas áreas é igual à razão entre suas bases. Assim, temos: $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{12-6\sqrt{3}}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

7) Sobre o conjunto solução em $\mathbb{R}$ da equação $\sqrt{(2x+1)^2} = x - 3$, podemos afirmar que:
(A) é unitário cujo elemento é positivo.
(B) possui dois elementos em que um é racional e outro irracional.
(C) é vazio.

(D) é unitário cujo elemento é negativo.
(E) possui dois elementos irracionais.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{(2x+1)^2} = x-3 \Leftrightarrow |2x+1| = x-3 \Leftrightarrow 2x+1 = \pm(x-3) \ \wedge \ x-3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2x+1 = x-3 \Leftrightarrow x = -4$$

$$2x+1 = -(x-3) \Leftrightarrow 2x+1 = -x+3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -4 \ \vee \ x = \frac{2}{3} \right) \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow S = \varnothing$$

8) Um capital C foi aplicado a uma taxa mensal numericamente igual ao capital. Quantos meses são necessários para que os juros simples sejam iguais ao quadrado do capital?
(A) 20
(B) 50
(C) 100
(D) 200
(E) 400

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Sejam $J = C^2$ os juros simples, $i = C\%$ ao mês a taxa e t o tempo em meses. Assim,

$$J = C \cdot i \cdot t \Leftrightarrow C^2 = C \cdot \frac{C}{100} \cdot t \Leftrightarrow t = 100 \text{ meses.}$$

9) Analise as afirmativas abaixo:
(I) Se $x^2 - 4x > x$, então $x > 5$.
(II) Se $x^2 - 1 > 0$ então $x > 1$.
(III) Se $\sqrt{x-3} = x+1$, então x só pode ser igual a 1.
(IV) $\dfrac{x^2-36}{x-6} = x+6$ para todo x real.
Assinale a alternativa correta:
(A) Todas as afirmativas são corretas.
(B) Apenas as afirmativas I, II e III são corretas.
(C) Apenas as afirmativas III e IV são corretas.
(D) Somente a afirmativa I é correta.
(E) Nenhuma das afirmativas é correta.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
(I) FALSA
$x^2-4x>x \Leftrightarrow x^2-5x>0 \Leftrightarrow x<0 \ \vee \ x>5$
(II) FALSA
$x^2-1>0 \Leftrightarrow x<-1 \ \vee \ x>1$
(III) FALSA
$\sqrt{x-3}=x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2=(x+1)^2 \wedge x-3\geq 0 \wedge x+1\geq 0 \Leftrightarrow x-3=x^2+2x+1 \wedge x\geq 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+x+4=0 \wedge x\geq 3$
A equação $x^2+x+4=0$ não possui solução real, pois $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$, portanto $S=\varnothing$.
(IV) FALSA
$\frac{x^2-36}{x-6}=\frac{(x-6)(x+6)}{x-6}=x+6, \ x\neq 6$
Observe que a fração algébrica não está definida para $x=6$, pois seu denominador se anula.

10) Um polígono regular convexo tem seu número de diagonais expresso por $n^2-10n+8$, onde n é o seu número de lados. O seu ângulo interno x é tal que:

a) $x<120^\circ$

b) $120^\circ<x<130^\circ$

c) $130^\circ<x<140^\circ$

d) $140^\circ<x<150^\circ$

e) $x>150^\circ$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
$D=\frac{n(n-3)}{2}=n^2-10n+8 \Leftrightarrow n^2-3n=2n^2-20n+16 \Leftrightarrow n^2-17n+16=0 \Leftrightarrow n=1 \ \vee \ n=16$
Como $n=1$ não pode ser o número de lados de um polígono, então $n=16$.

O ângulo interno do polígono regular convexo de gênero $n=16$ é $x=A_i=\frac{180^\circ(16-2)}{16}=157^\circ30'$.

Logo, conclui-se que $x>150^\circ$.

11) Os números a, b e c são inteiros não nulos, tais que: $\begin{cases}144a+12b+c=0\\256a+16b+c=0\end{cases}$, logo $\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}$ pode ser
(A) 151
(B) 152
(C) 153
(D) 154
(E) 155

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 144a+12b+c=0 \\ 256a+16b+c=0 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos:

$$(256a+16b+c)-(144a+12b+c)=0 \Leftrightarrow 112a+4b=0 \Leftrightarrow b=-28a$$

Isolando c na primeira equação e substituindo a relação encontrada, temos:

$$c=-12b-144a=-12\cdot(-28a)-144a=192a$$

$$\Rightarrow b^2-4\cdot a\cdot c=(-28a)^2-4\cdot a\cdot(192a)=784a^2-768a^2=16a^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}=\sqrt{16a^2}=4\cdot|a|$$

Assim, o valor de $\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}$ deve ser um múltiplo positivo de 4. O único múltiplo positivo de 4 dentre as opções é 152.

Observe que o sistema dado tem duas equações e três variáveis, portanto não poderia ser possível e determinado. Após resolvê-lo, concluímos que se trata de um sistema compatível e, portanto, possível e indeterminado, sendo necessário expressar a sua solução com o auxílio de um parâmetro.

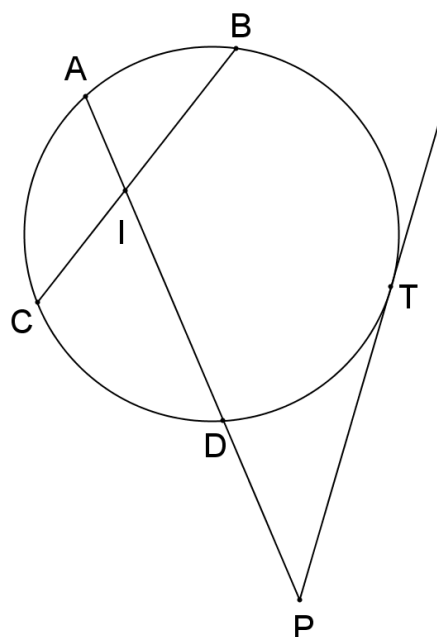
12) Resolvendo-se a expressão $\dfrac{8^{0,666\ldots}+4^{3/2}-2^{\sqrt{9}}+9^{0,5}}{\left(\frac{1}{49}\right)^{-1/2}}$, encontra-se

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\frac{8^{0,666\ldots}+4^{3/2}-2^{\sqrt{9}}+9^{0,5}}{\left(\frac{1}{49}\right)^{-1/2}}=\frac{(2^3)^{\frac{2}{3}}+(2^2)^{\frac{3}{2}}-2^3+(3^2)^{\frac{1}{2}}}{(7^{-2})^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2^2+2^3-2^3+3}{7}=\frac{7}{7}=1$$

13) Na figura abaixo, $\overline{PA}$ é uma secante ao círculo, $\overline{PT}$ é uma tangente ao círculo e $\overline{BC}$ é uma corda do círculo. Qual das relações abaixo sempre será válida?

(A) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}$

(B) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{AD}}$

(C) $\frac{\overline{CI}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{DI}}$

(D) $\frac{\overline{PT}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{PI}}$

(E) $\frac{\overline{PD}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{PA}}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Considerando a potência do ponto I em relação ao círculo, temos: $BI \cdot IC = AI \cdot ID \Leftrightarrow \frac{CI}{AI} = \frac{DI}{BI}$.

Considerando a potência do ponto P em relação ao círculo, temos: $PA \cdot PD = PT^2 \Leftrightarrow \frac{PD}{PT} = \frac{PT}{PA}$.

Logo, a opção correta é a letra A.

14) Sejam $M = \frac{x \cdot y}{x + y}$, onde x e y são reais positivos, logo M é:

(A) o quociente entre a média geométrica e a média aritmética de x e y.

(B) a metade do quociente entra média geométrica e a média aritmética de x e y.

(C) a média aritmética dos inversos de x e y.

(D) a média harmônica de x e y.

(E) a metade da média harmônica de x e y.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Observando que a média harmônica MH de dois números x e y é o inverso da média aritmética dos inversos desses dois números, então

$$MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{2xy}{x+y} = 2M \Leftrightarrow M = \frac{1}{2}\cdot MH.$$

Logo, M é a metade da média harmônica de x e y.

15) Calcule a soma dos cubos das raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$.
(A) 1
(B) -4
(C) -3
(D) -8
(E) -6

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
1º Método: Fatoração
Sejam r e s as raízes da equação, então a soma das raízes é $r+s=\frac{-1}{1}=-1$ e o produto das raízes é $r\cdot s=\frac{-1}{1}=-1$.

Logo, $r^3+s^3=(r+s)^3-3rs(r+s)=(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot(-1)=-4$.

2º Método: Fórmula de Newton
Seja $S_k = r^k + s^k$, $k \in \mathbb{Z}$, então a soma dos cubos das raízes é $S_3 = r^3 + s^3$.
Pela fórmula de Newton, $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow 1\cdot S_k + 1\cdot S_{k-1} - 1\cdot S_{k-2} = 0 \Leftrightarrow S_k = -S_{k-1} + S_{k-2}$.

$S_0 = r^0 + s^0 = 1 + 1 = 2$

$S_1 = r^1 + s^1 = r + s = -1$

$k = 2 \Rightarrow S_2 = -S_1 + S_0 = -(-1) + 2 = 3$

$k = 3 \Rightarrow S_3 = -S_2 + S_1 = -3 + (-1) = -4$

NOTA 2: FÓRMULA DE NEWTON:

Seja a equação do 2º grau da forma $ax^2+bx+c=0$, onde $a\neq 0$, e que possua raízes x_1 e x_2 não–nulas.
Seja S_n a soma das raízes elevadas ao expoente n, isto é, $S_n=x_1^n+x_2^n$, então:

$$aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$$

Observe que para aplicar essa fórmula devemos usar $S_0=x_1^0+x_2^0=1+1=2$ e $S_1=-\frac{b}{a}$.

Demonstração:
Como $x_1\neq 0$ é raiz da equação $ax^2+bx+c=0$, então $ax_1^2+bx_1+c=0$. Multiplicando essa equação por $x_1^{n-2}\neq 0$, temos: $ax_1^n+bx_1^{n-1}+cx_1^{n-2}=0$ (i).
Como $x_2\neq 0$ é raiz da equação $ax^2+bx+c=0$, então $ax_2^2+bx_2+c=0$. Multiplicando essa equação por $x_2^{n-2}\neq 0$, temos: $ax_2^n+bx_2^{n-1}+cx_2^{n-2}=0$ (ii).
Somando as equações (i) e (ii), temos:
$a\left(x_1^n+x_2^n\right)+b\left(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}\right)+c\left(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}\right)=0\Leftrightarrow aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$

Exemplo: Encontre a soma dos cubos e do quadrado dos inversos das raízes da equação $x^2-x+1=0$.
A soma dos cubos das raízes é $S_3=x_1^3+x_2^3$ e a soma dos inversos das raízes é $S_{-2}=x_1^{-2}+x_2^{-2}$.
Sabemos que $S_0=2$ e $S_1=-\frac{(-1)}{1}=1$.
Aplicando a fórmula de Newton, temos: $1\cdot S_n-1\cdot S_{n-1}+1\cdot S_{n-2}=0$
$n=2\Rightarrow 1\cdot S_2-1\cdot S_1+1\cdot S_0=0\Leftrightarrow 1\cdot S_2-1\cdot 1+1\cdot 2=0\Leftrightarrow S_2=-1$
$n=3\Rightarrow 1\cdot S_3-1\cdot S_2+1\cdot S_1=0\Leftrightarrow 1\cdot S_3-1\cdot(-1)+1\cdot 1=0\Leftrightarrow S_3=-2$
$n=1\Rightarrow 1\cdot S_1-1\cdot S_0+1\cdot S_{-1}=0\Leftrightarrow 1\cdot 1-1\cdot 2+1\cdot S_{-1}=0\Leftrightarrow S_{-1}=1$
$n=0\Rightarrow 1\cdot S_0-1\cdot S_{-1}+1\cdot S_{-2}=0\Leftrightarrow 1\cdot 2-1\cdot 1+1\cdot S_{-2}=0\Leftrightarrow S_{-2}=-1$
Logo a soma dos cubos das raízes é $S_3=-2$ e a soma do quadrado dos inversos das raízes é $S_{-2}=-1$.
****

16) A fração $\frac{312}{455}$ é equivalente à fração irredutível $\frac{a}{b}$, logo $a+b$ é igual a:
(A) 53
(B) 55
(C) 57
(D) 59
(E) 61

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$\frac{312}{455}=\frac{2^3\cdot 3\cdot 13}{5\cdot 7\cdot 13}=\frac{2^3\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{24}{35}\Leftrightarrow a=24\ \wedge\ b=35\Rightarrow a+b=24+35=59$$

17) A equação $x^4-8x^2+k^2-5=0$, onde k é um número inteiro, tem 4 raízes reais. A soma dos valores absolutos de k é:
(A) 13
(B) 14
(C) 15
(D) 16
(E) 17

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Para que a equação biquadrada $x^4-8x^2+k^2-5=0$ possua 4 raízes reais, a equação resultante após a substituição $y=x^2$, $y^2-8y+k^2-5=0$, deve possuir 2 raízes reais e não negativas (não necessariamente distintas).
A equação $y^2-8y+k^2-5=0$ possui duas raízes reais não negativas quando o discriminante, a soma e o produto das raízes são não negativos. Assim, temos:

$$\Delta=(-8)^2-4\cdot 1\cdot\left(k^2-5\right)\geq 0\Leftrightarrow 64-4k^2+20\geq 0\Leftrightarrow k^2-21\leq 0\Leftrightarrow -\sqrt{21}\leq k\leq\sqrt{21}$$

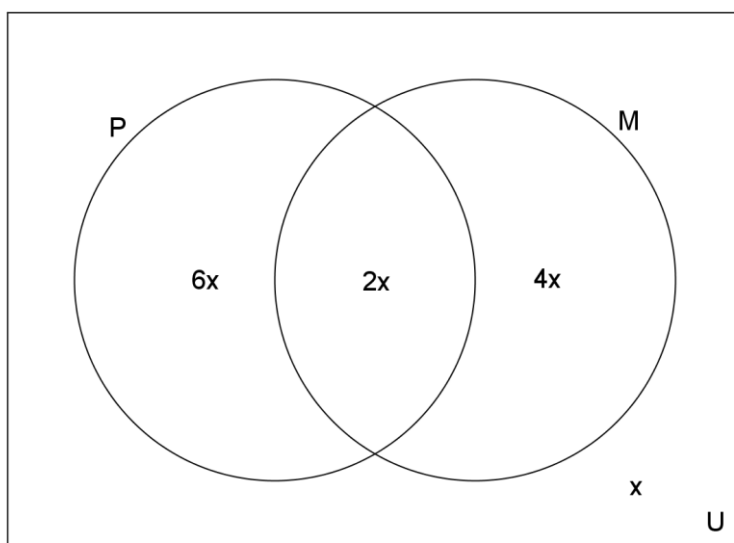
$$S=\frac{-(-8)}{1}=8>0$$

$$P=\frac{k^2-5}{1}\geq 0\Leftrightarrow k^2-5\geq 0\Leftrightarrow k\leq-\sqrt{5}\ \vee\ k\geq\sqrt{5}$$

Portanto, $-\sqrt{21}\leq k\leq-\sqrt{5}\ \vee\ \sqrt{5}\leq k\leq\sqrt{21}$ e, como $k\in\mathbb{Z}$, $\sqrt{5}\approx 2,2$ e $\sqrt{21}\approx 4,6$, temos $k\in\{-4,-3,3,4\}$.
Logo, a soma dos valores absolutos de k é $|-4|+|-3|+|3|+|4|=14$.

18) Num concurso, cada candidato fez uma prova de Português e uma de Matemática. Para ser aprovado, o aluno tem que passar nas duas provas. Sabe-se que o número de candidatos que passaram em Português é o quádruplo do número de aprovados no concurso; dos que passaram em Matemática é o triplo do número de candidatos aprovados no concurso; dos que não passaram nas duas provas é a metade do número de aprovados no concurso; e dos que fizeram o concurso é 260. Quantos candidatos foram reprovados no concurso?
(A) 140
(B) 160
(C) 180
(D) 200
(E) 220

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Sejam P o conjunto dos candidatos que passaram em Português e M o conjunto dos candidatos que passaram em Matemática.
Seja ainda $n(P \cap M) = 2x$ o número de aprovados no concurso, então o número de candidatos que passaram em Português é $n(P) = 4 \cdot 2x = 8x$, o número de candidatos que passaram em Matemática é $n(M) = 3 \cdot 2x = 6x$ e o número de candidatos que não passaram nas duas provas é $\frac{2x}{2} = x$.
Construindo um diagrama de Venn com as informações acima, temos:

O número de candidatos que fizeram o concurso é dado por:
$6x + 2x + 4x + x = 260 \Leftrightarrow 13x = 260 \Leftrightarrow x = 20$.
O número de candidatos reprovados no concurso é dado por:
$n(U - (P \cap M)) = 6x + 4x + x = 11x = 11 \cdot 20 = 220$.

19) Qual deverá ser o menor número inteiro que somado a cada um dos números 6, 8 e 14, obtém-se as medidas dos lados de um triângulo em que o ortocentro está no seu interior?
(A) 9
(B) 10
(C) 11
(D) 12
(E) 13

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja $n \in \mathbb{Z}$ o número somado, então os lados do triângulo serão $6 + n$, $8 + n$ e $14 + n$.
Os lados do triângulo devem satisfazer a desigualdade triangular, então
$14 + n < (8 + n) + (6 + n) \Leftrightarrow n > 0$.

Se o ortocentro está no interior do triângulo, então ele á acutângulo.
Pela síntese de Clairaut, o triângulo é acutângulo se, e somente se, o quadrado do maior lado é menor que a soma dos quadrados dos outros dois lados, então

$(14+n)^2 < (6+n)^2 + (8+n)^2 \Leftrightarrow 196 + 28n + n^2 < 36 + 12n + n^2 + 64 + 16n + n^2 \Leftrightarrow n^2 > 96$

Como $n > 0$, então $n \geq 10$. Logo, o menor valor inteiro de n é 10.

20) O quociente entre a maior e a menor raiz da equação $\sqrt[9]{x} + \frac{\sqrt[9]{x^8}}{x} = \frac{17}{4}$ é:

(A) 2^{27}
(B) 2^{32}
(C) 2^{36}
(D) 2^{45}
(E) 2^{54}

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt[9]{x} + \frac{\sqrt[9]{x^8}}{x} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow \sqrt[9]{x} + \frac{\sqrt[9]{x^8}}{\sqrt[9]{x^9}} - \frac{17}{4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[9]{x} + \frac{1}{\sqrt[9]{x}} - \frac{17}{4} = 0 \Leftrightarrow 4\left(\sqrt[9]{x}\right)^2 - 17 \cdot \sqrt[9]{x} + 4 = 0$$

Efetuando a substituição $y = \sqrt[9]{x}$, temos a equação $4y^2 - 17y + 4 = 0$ cujas raízes são $y = \frac{1}{4}$ ou $y = 4$
.

As raízes da equação original são dadas por:

$$\sqrt[9]{x} = \frac{1}{4} = 2^{-2} \Leftrightarrow x = \left(2^{-2}\right)^9 = 2^{-18}$$

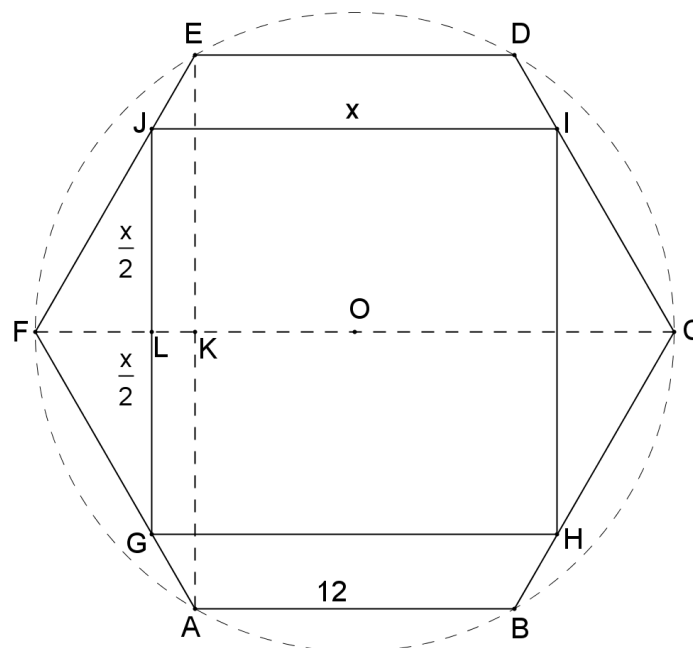
$$\sqrt[9]{x} = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x = \left(2^2\right)^9 = 2^{18}$$

Portanto, o quociente entre a maior e a menor raiz é $\frac{2^{18}}{2^{-18}} = 2^{18-(-18)} = 2^{36}$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1993/1994

1) Sendo x o lado do quadrado inscrito em um hexágono regular convexo de lado 12, tem-se que:
(A) $13 < x < 13,5$
(B) $13,5 < x < 14$
(C) $14 < x < 14,5$
(D) $14,5 < x < 15$
(E) $15 < x < 15,5$

RESPOSTA: E

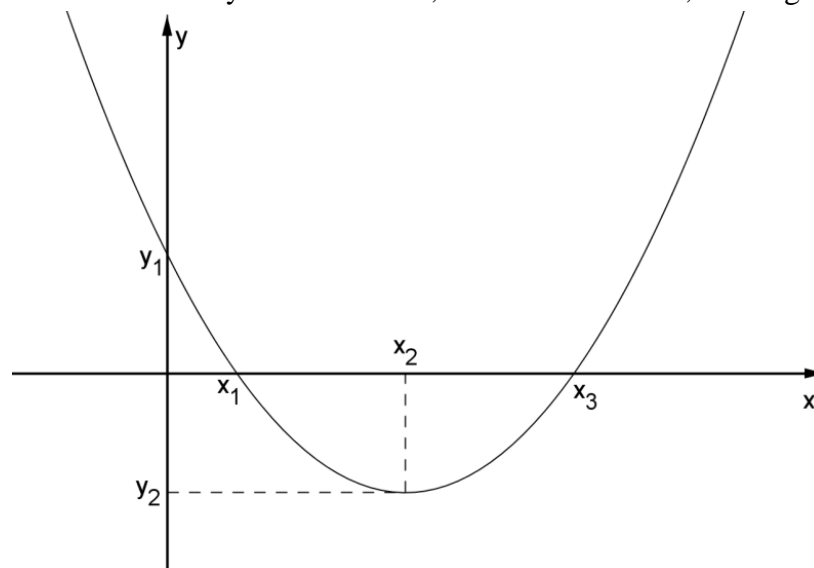
RESOLUÇÃO:

Seja $GHIJ$ um quadrado inscrito no hexágono regular $ABCDEF$ de lado 12, onde $GH \parallel IJ \parallel AB \parallel DE$ e $HI \parallel JG \parallel AE \parallel BD$.
Observando que o raio do círculo circunscrito ao hexágono é 12, então $CF = 24$ é um diâmetro e $AE = 12\sqrt{3}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito na mesma circunferência.

Os triângulos FLJ e FKE possuem lados paralelos, então $\Delta FLJ \sim \Delta FKE \Rightarrow \frac{JL}{EK} = \frac{FL}{FK}$.

Sabemos que $EK = \frac{AE}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, $FL = \frac{24-x}{2}$ e $FK = \frac{OF}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Assim, $\frac{JL}{EK} = \frac{FL}{FK} \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\frac{24-x}{2}}{6} \Leftrightarrow x = 24\sqrt{3} - x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 12\left(3-\sqrt{3}\right)$ u.c..

Portanto, $1,72 < \sqrt{3} < 1,75 \Leftrightarrow 1,25 < 3-\sqrt{3} < 1,28 \Leftrightarrow 15 < 12\left(3-\sqrt{3}\right) < 15,36 \Rightarrow 15 < x < 15,5$.

2) Considere o gráfico do trinômio $y = ax^2 + bx + c$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, e as seguintes afirmativas:

(I) $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

(II) $x_2 = \frac{-b}{2a}$

(III) $y_2 = \frac{-\Delta}{4a}$

(IV) $y_1 = c$

Quantas são as afirmativas verdadeiras?
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
(I) VERDADEIRA
$x_1 < x_3$ são as raízes as raízes ou zeros do trinômio $y = ax^2 + bx + c$
(II) VERDADEIRA
x_2 é a abscissa do vértice da parábola
(III) VERDADEIRA
y_2 é a ordenada do vértice da parábola
(IV) VERDADEIRA
y_1 é igual ao termo independente do trinômio, pois é o valor que o trinômio assume quando $x = 0$.
Portanto, as quatro afirmativas são verdadeiras.

3) A que taxa de juros simples, em porcentagem, ao ano deve-se emprestar um certo capital, para que no fim de 6 anos e 8 meses, duplique de valor?
(A) 10
(B) 12
(C) 15
(D) 18
(E) 20

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Sejam i a taxa de juros, C_0 o capital inicial, $C = 2C_0$ o capital final e $t = 6 \text{ anos e } 8 \text{ meses} = 80 \text{ meses}$ o tempo de aplicação.
Sabemos que $C = C_0(1 + i \cdot t)$, então

$$C_0 \cdot (1 + i \cdot 80) = 2C_0 \Leftrightarrow i = \frac{1}{80} = \frac{1}{80} \cdot 100\% = \frac{5}{4}\% \text{ ao mês} = \frac{5}{4}\% \cdot 12 \text{ ao ano} = 15\% \text{ ao ano}.$$

Observe que a taxa inicialmente encontrada está em percentual ao mês, pois foi utilizado na fórmula o tempo em meses.

4) Se o número "x" é a terceira proporcional entre os números $\underline{a}$ e $\underline{b}$, então os segmentos de medidas respectivamente iguais a $\underline{a}$, $\underline{x}$ e $\underline{b}$ podem ser num triângulo retângulo, respectivamente
(A) a hipotenusa, um cateto e a projeção deste cateto sobre a hipotenusa.
(B) a hipotenusa, um cateto e o outro cateto.
(C) a hipotenusa, uma projeção e a outra projeção dos catetos sobre a hipotenusa.
(D) uma projeção, a outra projeção dos catetos sobre a hipotenusa e a altura.
(E) um cateto, o outro cateto e a altura relativa à hipotenusa.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Se x é a terceira proporcional entre a e b, então $\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \Leftrightarrow x = \frac{b^2}{a}$.
Em um triângulo retângulo, sabemos que o quadrado de um cateto é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa. Portanto, a, x e b podem ser hipotenusa, projeção (não importa a ordem) e cateto.
Por outro lado, em um triângulo retângulo, o produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é igual ao quadrado da altura. Portanto, a, x e b podem ser uma projeção, a outra projeção dos catetos sobre a hipotenusa e a altura.
Logo, a alternativa correta é a letra D.

NOTA 3: TERCEIRA PROPORCIONAL E QUARTA PROPORCIONAL

Quarta proporcional

Quarta proporcional é o quarto termo de uma proporção. A quarta proporcional dos números a, b e c, nessa ordem, é $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\Leftrightarrow x=\frac{bc}{a}$

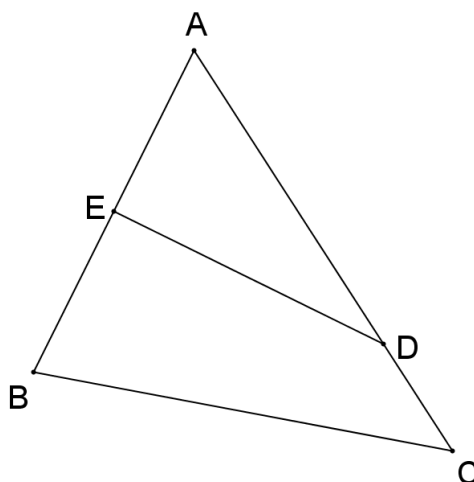
Terceira proporcional

Terceira proporcional é cada um dos termos desiguais de uma proporção que possui meios ou extremos iguais (proporção contínua). A terceira proporcional de a e b, nessa ordem, é $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}\Leftrightarrow x=\frac{b^2}{a}$.
O termo igual b é a média proporcional ou geométrica dos termos desiguais.
****

5) Em um navio existem 6 barcos e 15 guarnições. Cada barco tem uma guarnição de serviço por dia. Quantos dias, no mínimo, serão necessários para que todas as guarnições tenham ficado de serviço o mesmo número de vezes?
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 15

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Seja D o número de dias passados até que todas as guarnições tenham ficado de serviço o mesmo número N de vezes pela primeira vez.
O número de guarnições escaladas em D dias é $6\cdot D$ e, como cada guarnição foi escalada N vezes, o número de guarnições escaladas é $15\cdot N$. Logo, $6\cdot D=15\cdot N$.
Para que o número de dias D seja o menor possível, o resultado $6\cdot D=15\cdot N$ deve ser o menor múltiplo comum (m.m.c.) de 6 e 15.
$\text{mmc}(6,15)=30\Rightarrow 6\cdot D=15\cdot N=30\Leftrightarrow D=5$ e $N=2$
Logo, após 5 dias, cada guarnição ficou de serviço 2 vezes.

6) O triângulo ADE da figura é equivalente ao quadrilátero BCDE. Se $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$, então $\overline{AD}$ é qual fração de $\overline{AC}$?

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{8}$

RESPOSTA: B

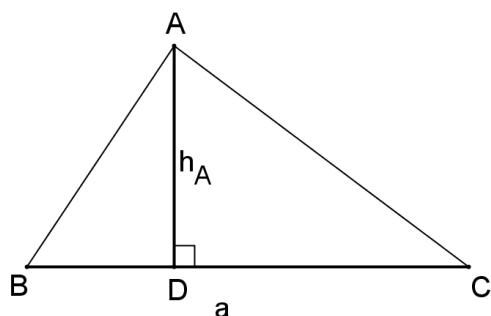
RESOLUÇÃO:

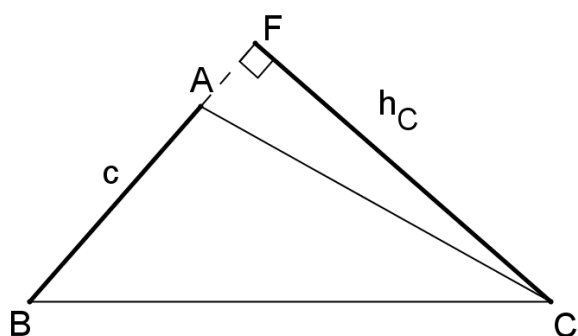
$$S_{ADE} = S_{BCDE} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2}S_{ABC} \Rightarrow \frac{AE \cdot AD}{2} \cdot \text{sen}\,\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \text{sen}\,\hat{A}$$

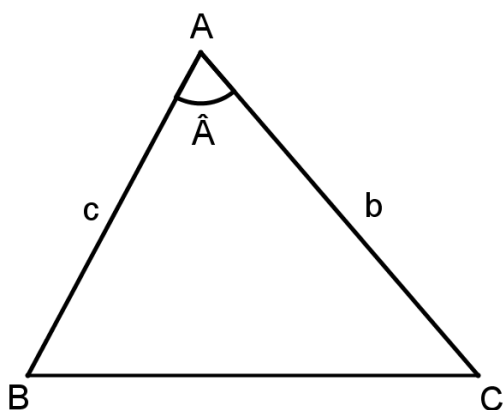
$$\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot AB \cdot AD = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow AD = \frac{3}{4}AC$$

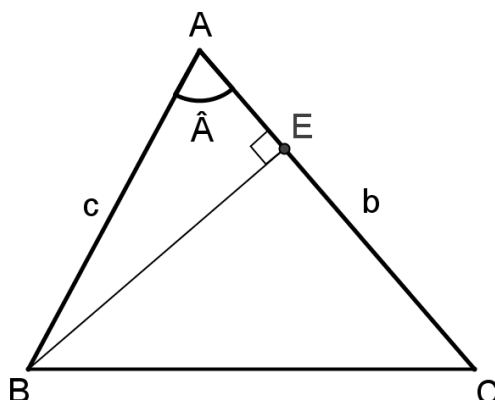
NOTA 4: ÁREA DE TRIÂNGULOS

Neste nota vamos apresentar algumas fórmulas úteis para o cálculo da área de triângulos, assim como algumas técnicas que auxiliam a resolução de problemas.

A área de um triângulo é igual à metade do produto de um dos lados pela altura relativa à ele.

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{c \cdot h_C}{2}$$

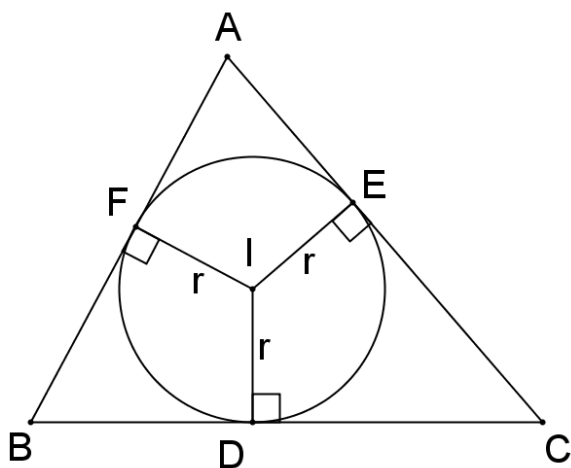
Note que, quando o triângulo é obtusângulo, o pé da altura pode estar no prolongamento do lado, mas a fórmula funciona do mesmo modo.

$$S_{ABC} = \frac{c \cdot h_C}{2}$$

A área de um triângulo é igual à metade do produto de dois lados adjacentes multiplicado pelo seno do ângulo entre eles.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot c}{2} \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a \cdot c}{2} \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{a \cdot b}{2} \operatorname{sen} \hat{C}$$

Demonstração:

Seja BE a altura relativa ao lado AC do ΔABC, então $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BE}{2}$.

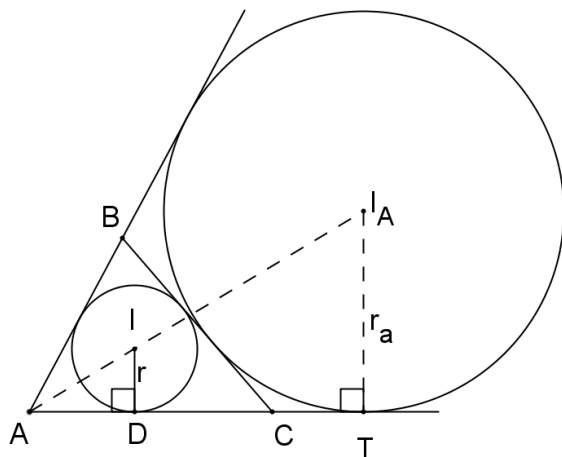
No triângulo retângulo ABE, temos $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow BE = AB \cdot \text{sen}\,\hat{A}$.

Logo, $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{AC}{2} \cdot AB\,\text{sen}\,\hat{A} = \frac{b \cdot c}{2}\,\text{sen}\,\hat{A}$.

A área de um triângulo é igual ao produto de seu semiperímetro pelo raio do círculo inscrito nesse triângulo.

$$S_{ABC} = p \cdot r$$

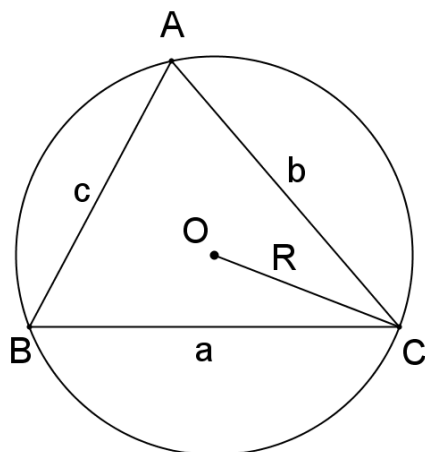
Demonstração:

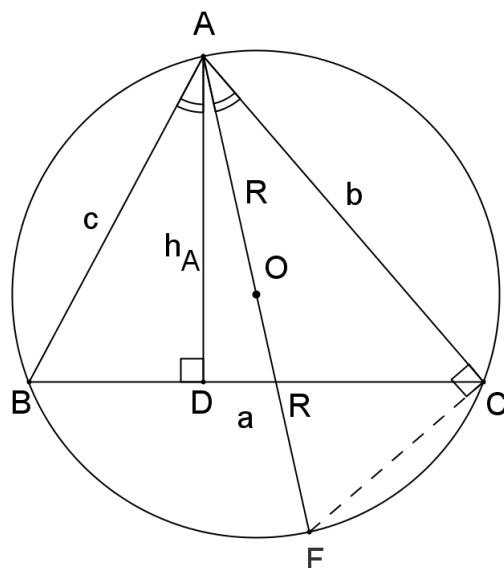
$$S_{ABC} = S_{ABI} + S_{ACI} + S_{BCI} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r = p \cdot r$$

A área de um triângulo é igual ao produto da diferença entre o semiperímetro e um dos seus lados pelo raio do círculo ex-inscrito relativo a esse lado.

$$S_{ABC} = (p-a)\cdot r_a = (p-b)\cdot r_b = (p-c)\cdot r_c$$

Demonstração:
Na figura $AD = p - a$ e $AT = p$.

$$\Delta ADI \sim \Delta ATI_A \Rightarrow \frac{ID}{I_A T} = \frac{AD}{AT} \Rightarrow \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p} \Leftrightarrow p\cdot r = (p-a)\cdot r_a \Rightarrow S_{ABC} = (p-a)\cdot r_a$$

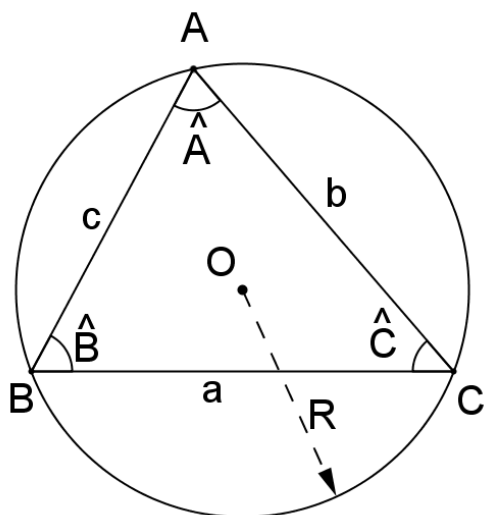
A área de um triângulo é igual aos produtos dos três lados dividido pelo quádruplo do raio do círculo circunscrito a esse triângulo.

$$S_{ABC} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

Demonstração:

AOF é um diâmetro do círculo circunscrito, então $A\hat{C}F = 90°$.

$$A\hat{B}C = A\hat{F}C = \frac{AC}{2} \Rightarrow B\hat{A}D = C\hat{A}F$$

$$\Delta BDA \sim \Delta FCA \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow b \cdot c = h_A \cdot 2R$$

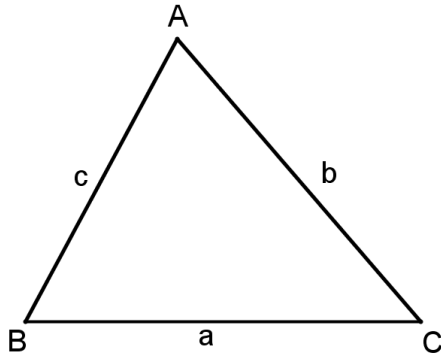
$$S_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{bc}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

A área de um triângulo é igual ao dobro do quadrado do raio do círculo circunscrito multiplicado pelo produto dos senos de seus ângulos.

$$S_{ABC} = 2R^2 \cdot \text{sen}\,\hat{A} \cdot \text{sen}\,\hat{B} \cdot \text{sen}\,\hat{C}$$

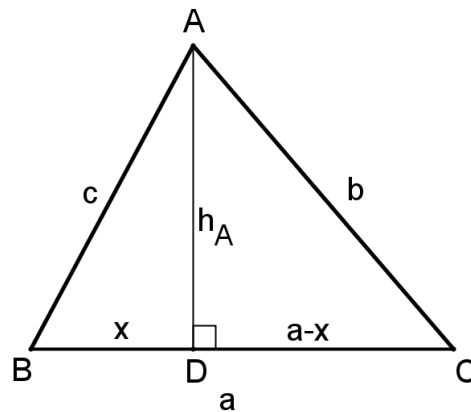
Demonstração:

Aplicando a lei dos senos ao ΔABC, temos $\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \frac{2R \operatorname{sen} \hat{A} \cdot 2R \operatorname{sen} \hat{B} \cdot 2R \operatorname{sen} \hat{C}}{4R} = 2R^2 \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} \hat{C}$$

Fórmula de Heron: A área de um triângulo é igual à raiz quadrada do produto do semiperímetro pela diferença entre o semiperímetro e cada um dos lados do triângulo.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

Demonstração:

Aplicando o teorema de Pitágoras nos ΔABD e ΔACD, temos:

$$h_A^2 + x^2 = c^2$$

$$h_A^2 + (a-x)^2 = b^2$$

$$x^2 - (a-x)^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow a \cdot (2x - a) = c^2 - b^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

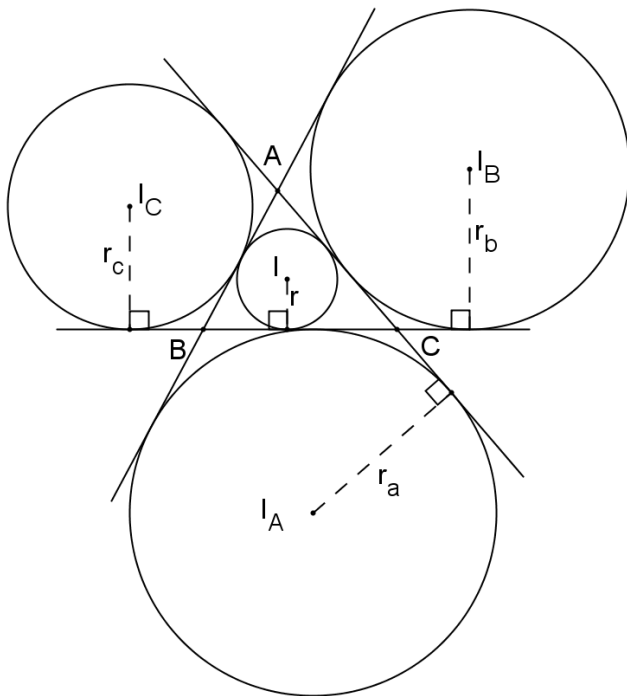
$$\Rightarrow h_A^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x) = \left(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right)\left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right) =$$

$$= \frac{1}{4a^2}\left(2ac + a^2 + c^2 - b^2\right)\left(2ac - a^2 - c^2 + b^2\right) = \frac{1}{4a^2}\left[(a+c)^2 - b^2\right]\left[b^2 - \left(a - c^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4a^2}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a) = \frac{1}{4a^2} \cdot 2p \cdot (2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)$$

$$= \frac{4}{a^2} \cdot p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)$$

$$\Rightarrow h_A = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

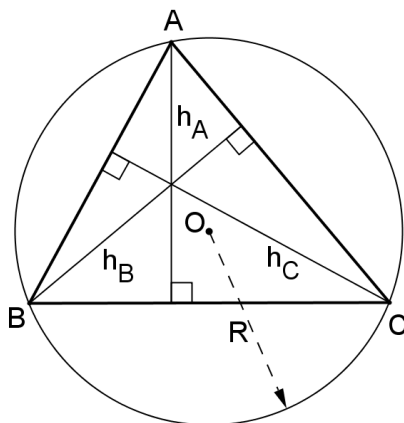
A área de um triângulo é igual à raiz quadrada do produto do raio do círculo inscrito e dos três raios dos círculos ex-inscritos ao triângulo.

$$S_{ABC} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

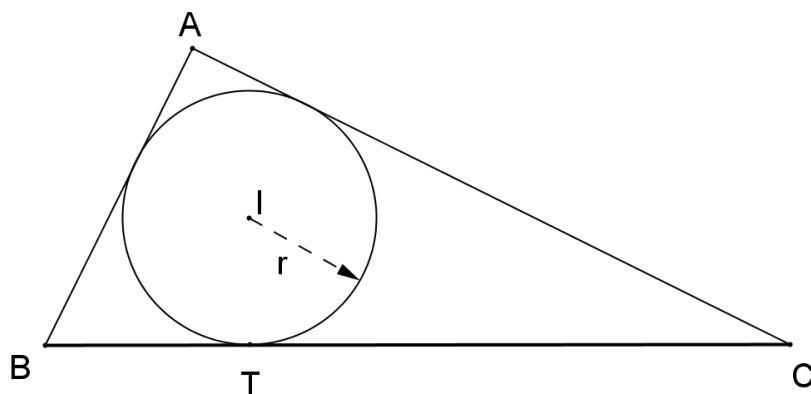
Demonstração:

$$S_{ABC} = p \cdot r = (p-a) \cdot r_a = (p-b) \cdot r_b = (p-c) \cdot r_c$$

$$\Rightarrow S_{ABC}^4 = p(p-a)(p-b)(p-c) \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = S_{ABC}^2 \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \Rightarrow S_{ABC}^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

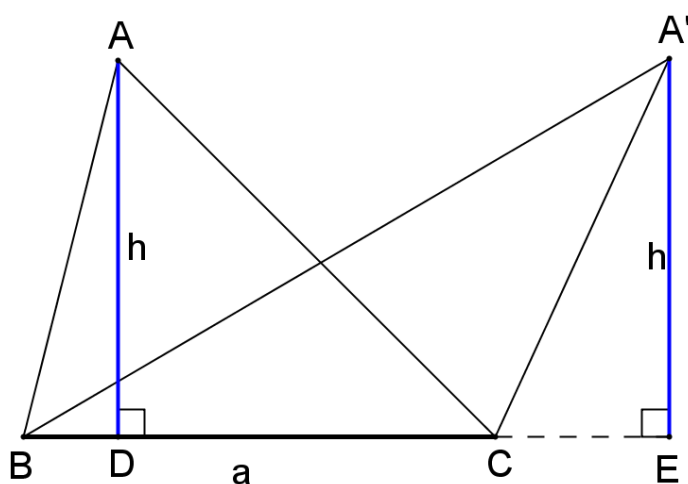
A área de um triângulo é igual à raiz quadrada da metade do produto do raio do círculo circunscrito por cada uma das três alturas do triângulo.

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{R \cdot h_A \cdot h_B \cdot h_C}{2}}$$

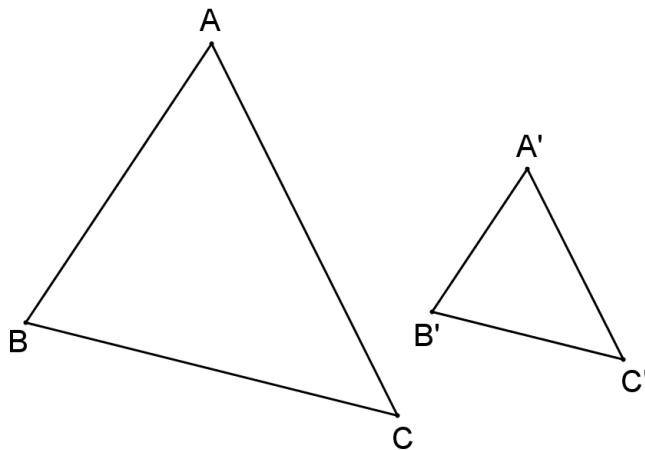
Teorema de Burlet: Em um triângulo retângulo, a área é igual ao produto dos segmentos determinados pelo círculo inscrito sobre a hipotenusa.

$$S_{ABC} = BT \cdot TC$$

Demonstração:

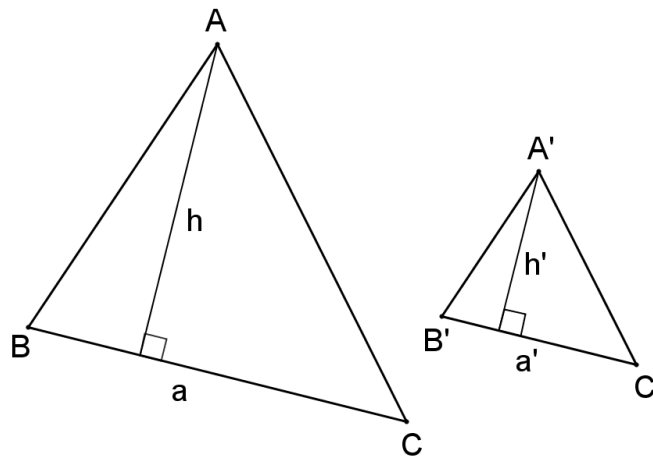
$$\left.\begin{array}{l} BT = p - b \\ CT = p - c \\ r = p - a \\ S_{ABC} = p \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABC}^2 = p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) = S_{ABC} \cdot BT \cdot CT \Leftrightarrow S_{ABC} = BT \cdot CT$$

Figuras equivalentes são aquelas que possuem a mesma área.

Se dois triângulos possuem bases e alturas congruentes, então eles são equivalentes.

$$S_{ABC} = S_{A'BC}$$

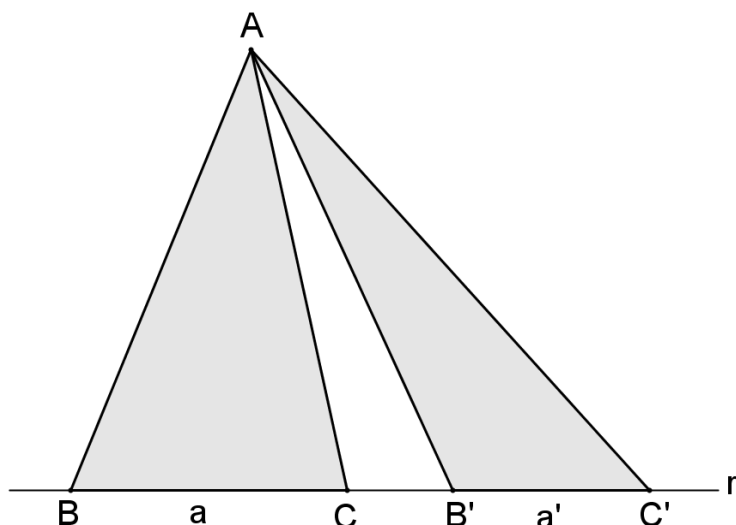
Se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$

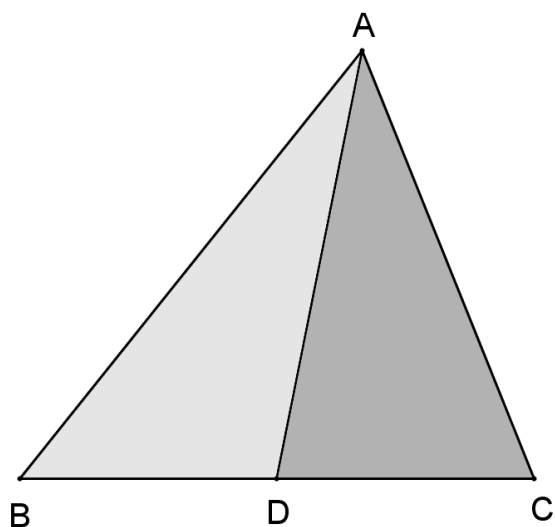
onde k é a razão de semelhança

Demonstração:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{a' \cdot h'}{2}} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k^2$$

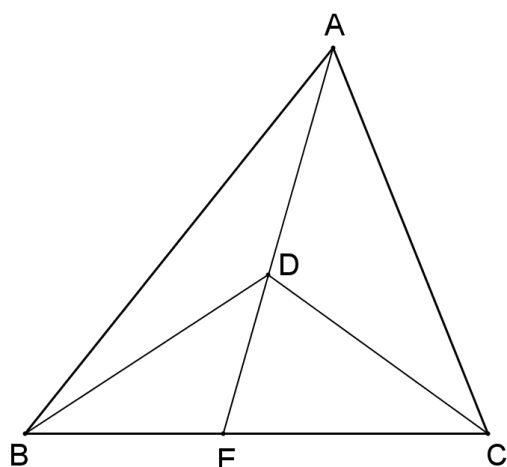
Note que essa propriedade vale para quaisquer figuras semelhantes, não só para triângulos.

Se dois triângulos possuem bases sobre a mesma reta e vértice comum, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}}=\frac{a}{a'}$$

Demonstração: Basta observar que os dois triângulos possuem a mesma altura.

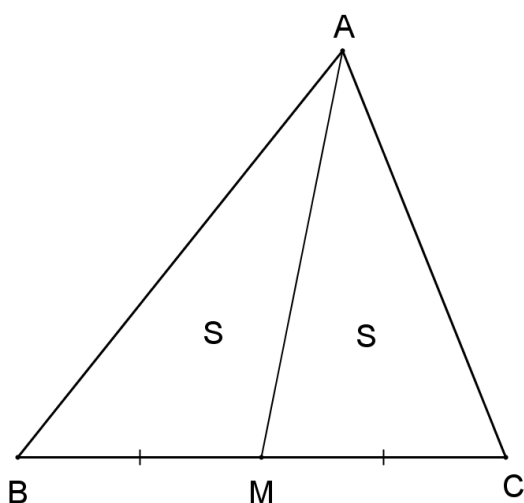
Uma consequência imediata da proposição anterior é que a razão entre as áreas em que uma ceviana divide um triângulo é igual à razão entre as medidas dos segmentos em que essa ceviana divide o lado.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD};\quad \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{BD}{BC};\quad \frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\frac{CD}{BC}$$

$$\frac{S_{ABD}}{BD}=\frac{S_{ACD}}{CD}=\frac{S_{ABC}}{BC}$$

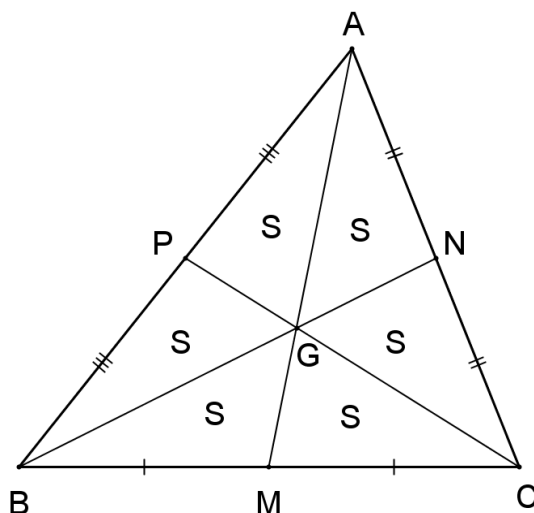
Se dois triângulos possuem base comum e o vértice de um deles pertence a uma ceviana do outro partindo do vértice oposto à base comum, então a razão entre a área do maior e do menor deles é igual à razão entre a medida da ceviana e a medida da parte entre o vértice do menor e a base comum.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AE}{DE}$$

Demonstração:

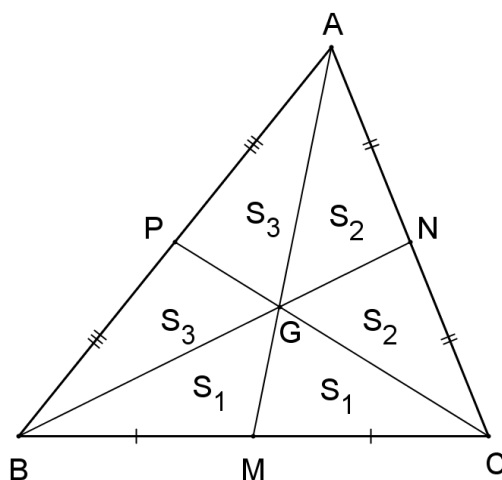
$$\frac{S_{ABE}}{S_{BDE}} = \frac{AE}{DE} \wedge \frac{S_{ACE}}{S_{CDE}} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow \frac{S_{ABE} + S_{ACE}}{S_{BDE} + S_{CDE}} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AE}{DE}$$

Uma mediana divide o triângulo em duas regiões equivalentes.

Seja AM a mediana relativa ao lado BC do ΔABC.

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S_{ABC}}{2}$$

As três medianas de um triângulo dividem esse triângulo em seis triângulos equivalentes.

Sejam AM, BN e CP as medianas do ΔABC, então

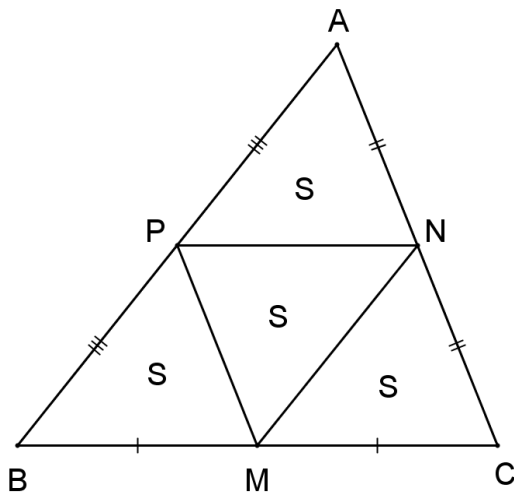
$$S_{AGN} = S_{AGP} = S_{BGM} = S_{BGP} = S_{CGM} = S_{CGN} = \frac{S_{ABC}}{6}$$

Demonstração:

Como M, N e P são pontos médios, então os ΔBGC, ΔAGC e ΔAGB são divididos em duas áreas equivalentes S_1, S_2 e S_3, respectivamente.

AM é mediana $\Rightarrow S_{ABM} = S_{ACM} \Rightarrow S_1 + 2 \cdot S_3 = S_1 + 2 \cdot S_2 \Leftrightarrow S_2 = S_3$

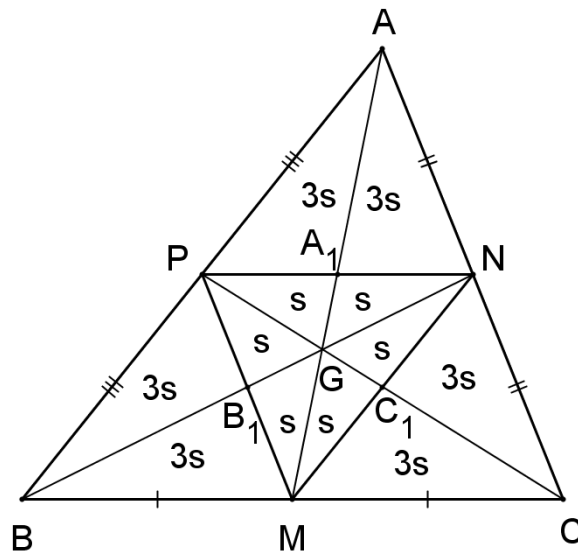
BN é mediana $\Rightarrow S_{BCN} = S_{BAN} \Rightarrow S_2 + 2 \cdot S_1 = S_2 + 2 \cdot S_3 \Rightarrow S_1 = S_3$

$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S_{ABC}}{6}$

As três bases médias de um triângulo dividem o triângulo em quatro regiões equivalentes.

Sejam M, N e P os pontos médios dos lados do ΔABC, então

$$S_{MNP} = S_{ANP} = S_{BMP} = S_{CMN} = S = \frac{S_{ABC}}{4}$$

Demonstração: Basta observar que $\Delta MNP \equiv \Delta ANP \equiv \Delta BMP \equiv \Delta CMN$.

As três medianas e as três bases médias de um triângulo dividem o triângulo em 12 triângulos, 6 deles equivalentes a $\frac{1}{8}$ da área do triângulo e 6 deles equivalentes a $\frac{1}{24}$ da área do triângulo.

Sejam M, N e P os pontos médios dos lados do ΔABC, então

$$S_{APA_1} = S_{ANA_1} = S_{BMB_1} = S_{BPB_1} = S_{CMC_1} = S_{CNC_1} = 3s = \frac{S_{ABC}}{8}$$

$$S_{A_1GP} = S_{A_1GN} = S_{B_1GM} = S_{B_1GP} = S_{C_1GM} = S_{C_1GN} = s = \frac{S_{ABC}}{24}$$

Demonstração:
Os pontos A_1, B_1 e C_1 são pontos médios de PN, MN e MP, respectivamente.

$$AG = \frac{2}{3}AM \wedge AA_1 = \frac{1}{2}AM \Rightarrow A_1G = AG - AA_1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)AM = \frac{AM}{6} \Rightarrow \frac{AA_1}{A_1G} = \frac{\frac{AM}{2}}{\frac{AM}{6}} = 3$$

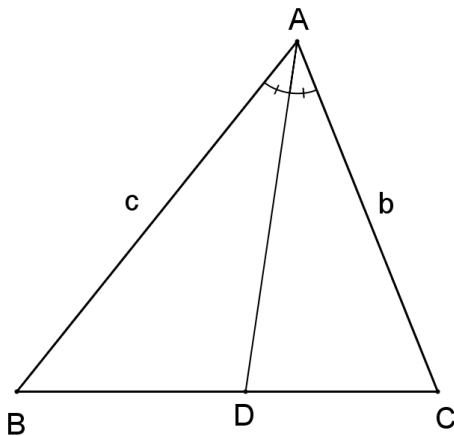
$$\Rightarrow \frac{S_{A_1AN}}{S_{A_1GN}} = \frac{A_1A}{A_1G} = 3$$

Analogamente, temos $\frac{S_{A_1AN}}{S_{A_1GN}} = \frac{S_{A_1AP}}{S_{A_1GP}} = \frac{S_{B_1BM}}{S_{B_1GM}} = \frac{S_{B_1BP}}{S_{B_1GP}} = \frac{S_{C_1CM}}{S_{C_1GM}} = \frac{S_{C_1CN}}{S_{C_1GN}} = 3$

$$S_{APN} = S_{APA_1} + S_{ANA_1} = 2 \cdot S_{ANA_1} = \frac{S_{ABC}}{4} \Rightarrow S_{ANA_1} = \frac{S_{ABC}}{8}$$

$$\frac{S_{A_1GN}}{S_{ANA_1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{A_1GN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{ABC}}{8} = \frac{S_{ABC}}{24}$$

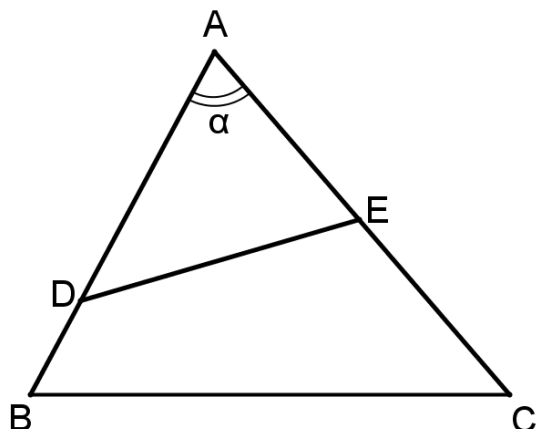
Analogamente, prova-se para os outros triângulos.

A bissetriz de um dos ângulos de um triângulo divide-o em dois triângulos cujas áreas estão na mesma razão que os lados adjacentes ao ângulo.

Seja AD a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do ΔABC, então

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

Demonstração:
Pelo teorema das bissetrizes, temos: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

Logo, $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$.

Se dois triângulos possuem um ângulo comum, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre os produtos dos lados adjacentes a esse ângulo.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$$

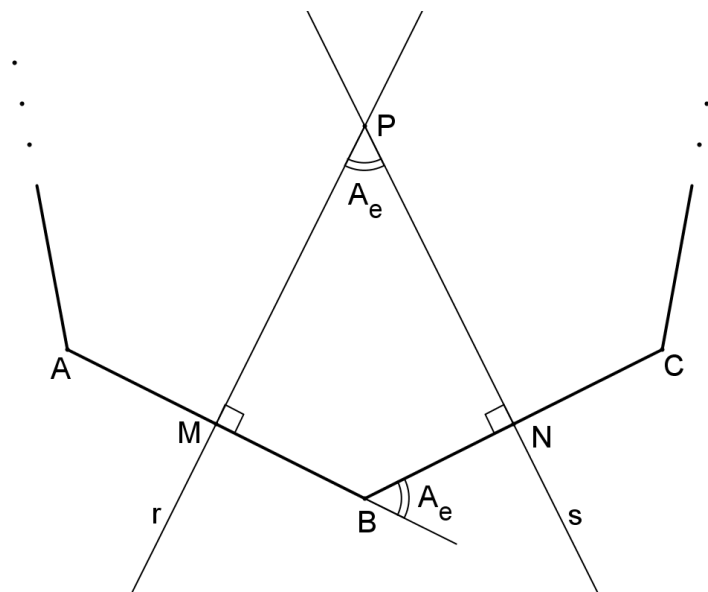
Demonstração: Basta observar que $S_{ADE} = \frac{AD \cdot AE}{2} \operatorname{sen} \alpha$ e $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \operatorname{sen} \alpha$.

****

7) Um aluno escreveu o ângulo formado pelas mediatrizes de dois lados adjacentes de um polígono regular convexo de treze lados, em graus, minutos e segundos. Sendo estes últimos com uma parte inteira e outra fracionária. Assim sendo, pode-se afirmar que o número inteiro de segundos é:

(A) 26
(B) 28
(C) 30
(D) 32
(E) 34

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ lados adjacentes de um polígono regular, e r e s suas respectivas mediatrizes. Como $r \perp \overline{AB}$ e $s \perp \overline{BC}$, então o quadrilátero $BMPN$ é inscritível, o que implica que o ângulo entre as mediatrizes dos lados adjacentes é igual ao ângulo externo do polígono, ou seja, $M\hat{P}N = \hat{A}_e = \frac{360^\circ}{n}$, onde n é o gênero do polígono.

No caso em análise o gênero do polígono é $n = 13$, então o ângulo entre as mediatrizes dos lados adjacentes é igual a

$$\frac{360^\circ}{13} = 27^\circ + \left(\frac{9}{13}\right)^\circ = 27^\circ + \left(\frac{9 \cdot 60}{13}\right)' = 27^\circ + 41' + \left(\frac{7}{13}\right)' = 27^\circ + 41' + \left(\frac{7 \cdot 60}{13}\right)'' = 27^\circ 41' 32\frac{4}{13}''.$$

Portanto, o número inteiro de segundos é 32.

8) O número $\frac{1}{\sqrt[4]{2\sqrt{2}+3}}$ é igual a

(A) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$

(B) $\sqrt{\sqrt{2}+2}$

(C) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$

(D) $\sqrt{1-\sqrt{2}}$

(E) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2\sqrt{2}+3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2}} = \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

9) O resto da divisão do número 743^{48} por 6 é:
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$743 = 6 \cdot 124 - 1 \Rightarrow 743 \equiv -1 \pmod 6 \Rightarrow 743^{48} \equiv (-1)^{48} \equiv 1 \pmod 6$
Portanto, o resto da divisão do número 743^{48} por 6 é 1.

10) Um tanque tem duas torneiras para enchê-lo. A primeira tem uma vazão de 6 litros por minuto e a segunda de 4 litros por minuto. Se metade do tanque é enchido pela primeira torneira num certo tempo t_1, e o restante pela segunda em um certo tempo t_2, qual deveria ser a vazão, em litros, por minuto de uma única torneira para encher completamente o tanque no tempo $t_1 + t_2$?
(A) $4,5$
(B) $4,8$
(C) $5,0$
(D) $5,2$
(E) $5,8$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Se o tanque tem volume V, então $\frac{V}{2} = 6 \cdot t_1 = 4 \cdot t_2$, onde t_1 e t_2 estão expressos em minutos. Assim, $t_1 = \frac{V}{12}$ e $t_2 = \frac{V}{8}$.
Seja x litros por minuto a vazão da torneira que enche o tanque no tempo $t_1 + t_2$, então

$$V = x \cdot (t_1 + t_2) \Leftrightarrow x = \frac{V}{t_1 + t_2} = \frac{V}{\frac{V}{12} + \frac{V}{8}} = \frac{12 \cdot 8}{12 + 8} = 4,8 \text{ litros por minuto.}$$

11) A razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é um número
(A) que varia em função do raio da circunferência.
(B) constante e inteiro.
(C) constante e tem notação decimal finita.
(D) constante e tem notação decimal infinita periódica.
(E) constante e tem notação decimal infinita e não periódica.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O comprimento C de uma circunferência é dado por $C = \pi \cdot D$, onde D é o seu diâmetro, então a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é $\frac{C}{D} = \pi$ que é um número irracional e, portanto, é constante e tem representação decimal infinita e não periódica.

12) Para que valores de k e p o sistema

$$\begin{cases} kx - 6y = 5k - 3p \\ (k-4)x + 2y = 4k + 3 \end{cases}$$

é indeterminado?
(A) $k = 20$ e $p = 3$
(B) $k = 10$ e $p = 6$
(C) $k = 10$ e $p = 3$
(D) $k = 3$ e $p = 20$
(E) $k = 3$ e $p = 10$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
O sistema é indeterminado se, e somente se, $\frac{k}{k-4} = \frac{-6}{2} = \frac{5k-3p}{4k+3}$.

$$\frac{k}{k-4} = -3 \Leftrightarrow k = -3k + 12 \Leftrightarrow 4k = 12 \Leftrightarrow k = 3$$

$$\frac{5k-3p}{4k+3} = -3 \Rightarrow \frac{5 \cdot 3 - 3p}{4 \cdot 3 + 3} = -3 \Leftrightarrow 15 - 3p = -45 \Leftrightarrow 3p = 60 \Leftrightarrow p = 20$$

13) Considere que, ao congelar-se, a água aumenta de $\frac{1}{15}$ do seu volume. Quantos litros de água obtém-se, quando se descongela um bloco de gelo de $0,50\text{ m}$ de comprimento, $0,30\text{ m}$ de largura e $0,40\text{ m}$ de altura?
(A) 56
(B) $56,25$
(C) $56,5$
(D) 60
(E) 64

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja V_G o volume de gelo obtido do congelamento de um volume de água V_A, então $V_G = V_A + \frac{1}{15}V_A = \frac{16}{15}V_A \Leftrightarrow V_A = \frac{15}{16}V_G$.
As dimensões do bloco de gelo são $0,50\text{ m} = 5\text{ dm}$, $0,30\text{ m} = 3\text{ dm}$ e $0,40\text{ m} = 4\text{ dm}$ e o seu volume é $V_G = 5\cdot 3\cdot 4 = 60\text{ dm}^3 = 60\ \ell$.
Logo, o volume de água obtido do descongelamento do bloco de gelo é $V_A = \frac{15}{16}V_G = \frac{15}{16}\cdot 60 = 56,25\ \ell$.

14) Considere a equação do primeiro grau em "x": $m^2x + 3 = m + 9x$. Pode-se afirmar que a equação tem conjunto verdade unitário se:
(A) $m = 3$
(B) $m = -3$
(C) $m \neq -3$
(D) $m \neq 3$
(E) $m \neq 3$ e $m \neq -3$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
A equação $m^2x + 3 = m + 9x \Leftrightarrow (m^2 - 9)\cdot x = m - 3$ é possível e determinada (possui conjunto verdade unitário) se, e somente se, $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$ e $m \neq 3$.
Observe que para uma equação do 1° grau da forma $ax = b$ temos as seguintes possibilidades:
Se $a \neq 0$ é possível e determinada e tem solução única.
Se $a = b = 0$ é possível indeterminada e tem infinitas soluções.
Se $a = 0$ e $b \neq 0$ é impossível e não possui soluções.

15) A soma das raízes da equação de raízes reais $mx^4 + nx^2 + p = 0$, $m \neq 0$, é:
(A) 0
(B) $-\frac{n}{m}$
(C) $-\frac{2n}{m}$
(D) $\frac{p}{m}$
(E) $-\frac{p}{m}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
A soma de todas as raízes da equação polinomial do 4° grau é dada pelo simétrico do coeficiente de x^3 dividido pelo coeficiente líder. No caso da questão, essa soma é dada por $\sigma_1 = -\frac{0}{m} = 0$.

Note que, para que a condição dada no enunciado, de que a equação possui apenas raízes reais, seja satisfeita é necessário que a equação do 2° grau resolvente possua duas raízes reais não negativas.
Fazendo $y = x^2$, temos $my^2 + ny + p = 0$ e para que as raízes sejam reais e não negativas devemos ter $\Delta = n^2 - 4mp \geq 0$, a soma $S = -\frac{n}{m} \geq 0$ e o produto $P = \frac{p}{m} \geq 0$. Dessa forma, também poderíamos encontrar a soma das raízes, supondo que a equação resolvente possua raízes reais não negativas $r_1, r_2 \geq 0$ e, consequentemente, as raízes da equação original seriam $\pm\sqrt{r_1}$ e $\pm\sqrt{r_2}$, cuja soma é zero.

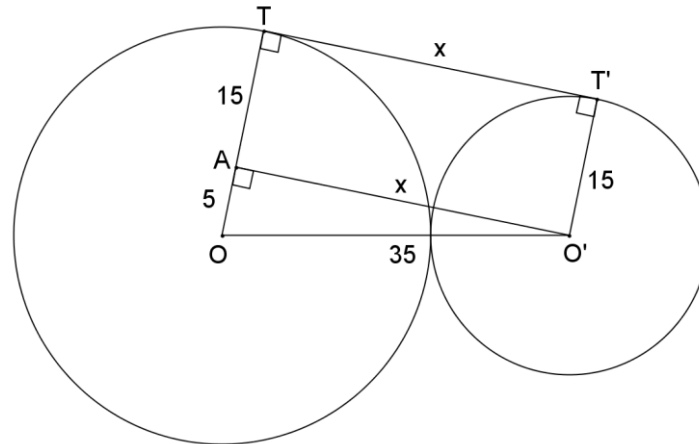
16) Num certo país, o governo resolveu substituir todos os impostos por um imposto único, que seria, no caso dos salários, de 20% sobre os mesmos. Para que um trabalhador receba, após o desconto, o mesmo salário que recebia antes, deverá ter um aumento sobre o mesmo de:
(A) 15%
(B) 20%
(C) 25%
(D) 40%
(E) 50%

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Para resolver esse problema vamos assumir que antes não havia nenhum imposto sobre o salário.
Sejam x o salário original e y o novo salário antes da incidência do imposto. O novo salário, após a incidência do imposto, deve ser igual ao salário original, ou seja, $y \cdot (1 - 20\%) = x \Leftrightarrow 0,8 \cdot y = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{0,8} = 1,25 \cdot x$. Assim, o trabalhador deve ter um aumento de 25% para continuar recebendo o mesmo valor após o desconto.

17) Os raios de dois círculos medem 15 m e 20 m, e a distância dos seus centros é 35 m. O segmento da tangente comum, compreendido entre os pontos de contato, mede em metros:
(A) $5\sqrt{3}$
(B) $10\sqrt{3}$
(C) $12\sqrt{3}$
(D) $15\sqrt{3}$
(E) $20\sqrt{3}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Como a distância entre os centros é igual à soma dos raios das circunferências, então as circunferências são tangentes exteriores.
A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.

Seja TT' a tangente comum externa às circunferências, então $OT \perp TT'$ e $O'T' \perp TT'$.
Se o ponto A é a projeção do ponto O' sobre o segmento OT, então o quadrilátero $O'ATT'$ obtido é um retângulo.
$OA = OT - AT = OT - O'T' = 20 - 15 = 5$
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta OO'A$, temos: $x^2 + 5^2 = 35^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$ m.

18) Se $\begin{cases} \dfrac{4x-9}{7} < x-3 \\ \dfrac{3x+10}{4} > 2x-5 \end{cases}$, então:
(A) $x < 4$
(B) $4 < x < 6$
(C) $5 < x < 6$
(D) $6 < x < 7$
(E) $x > 7$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} \dfrac{4x-9}{7} < x-3 \Leftrightarrow 4x-9 < 7x-21 \Leftrightarrow 4x-7x < -21+9 \Leftrightarrow -3x < -12 \Leftrightarrow x > 4 \\ \dfrac{3x+10}{4} > 2x-5 \Leftrightarrow 3x+10 > 8x-20 \Leftrightarrow 3x-8x > -20-10 \Leftrightarrow -5x > -30 \Leftrightarrow x < 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 6\}$$

19) Efetuando-se $\frac{x}{2+y}+\frac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4}:\frac{2-x}{2+y}$, encontra-se:

(A) $\frac{x}{2+y}$

(B) $\frac{x+2}{y+2}$

(C) $\frac{2}{y+2}$

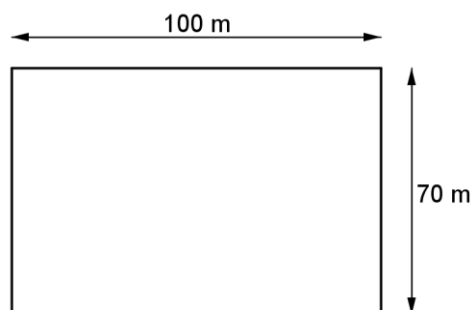
(D) $\frac{2x}{y+2}$

(E) $\frac{2-x}{y+2}$

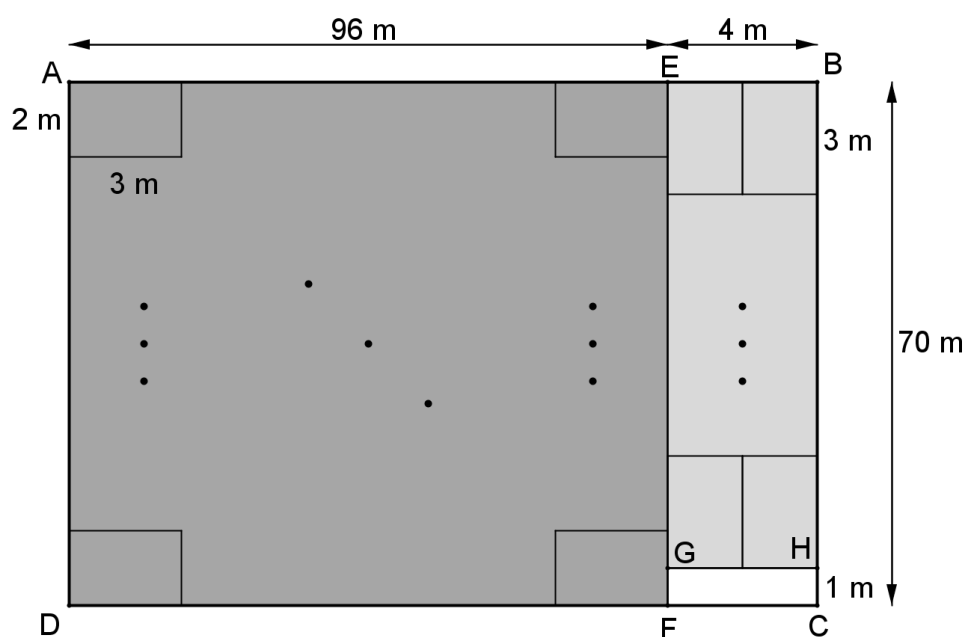
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\frac{x}{2+y}+\frac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4}:\frac{2-x}{2+y}=\frac{x}{2+y}+\frac{(2-x)^2}{(y+2)^2}\cdot\frac{2+y}{2-x}=\frac{x}{2+y}+\frac{2-x}{2+y}=\frac{2}{2+y}$$

20) A área esquematizada abaixo representa um pátio para estacionamento de veículos. Reservando-se um espaço retangular mínimo de 2 metros por 3 metros para cada um, quantos veículos no máximo pode-se ali estacionar?

(A) 1150
(B) 1155
(C) 1160
(D) 1166
(E) 1170

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A área ocupada por cada veículo é $S_V = 2 \cdot 3 = 6\text{ m}^2$. A área do pátio de estacionamento é $S_P = 100 \cdot 70 = 7000\text{ m}^2$. Dessa forma, a quantidade de veículos não pode ultrapassar $\left\lfloor \frac{S_P}{S_V} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7000}{6} \right\rfloor = 1166$, onde $\lfloor x \rfloor$ representa o maior número inteiro menor ou igual a x.
Entretanto, temos que analisar se é possível encontrar uma configuração de vagas que atinja esse número.
A figura a seguir representa uma distribuição de vagas, onde os retângulos das vagas estão fora de proporção para permitir melhor visualização.

Na descrição que segue, a primeira dimensão é a horizontal e a segunda, a vertical. Separando o retângulo ADFE de $96\text{ m} \times 70\text{ m}$ conseguimos $\frac{96}{3} \cdot \frac{70}{2} = 32 \cdot 35 = 1120$ vagas de $3\text{ m} \times 2\text{ m}$, ocupando-o completamente. Resta o retângulo EBCF de $4\text{ m} \times 70\text{ m}$ no qual podem ser obtidas $\frac{4}{2} \cdot \left\lfloor \frac{70}{3} \right\rfloor = 2 \cdot 23 = 46$ vagas de $2\text{ m} \times 3\text{ m}$. Dessa forma, podemos estacionar, no máximo, $1120 + 46 = 1166$ veículos.
Observe que, nessa distribuição, não é utilizado apenas o retângulo CFGH de $4\text{ m} \times 1\text{ m}$, ou seja, de 4 m^2, área inferior ao espaço de uma vaga.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1991/1992

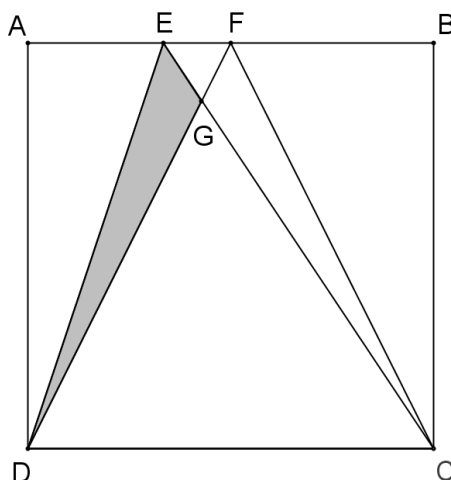
1) Considere a seguinte questão já resolvida por um aluno e numere a segunda coluna de acordo com a 1ª:

1ª COLUNA	**2ª COLUNA**
(1) A soma dos quadrados de três e cinco. (2) Menos três ao quadrado. (3) O quadrado da soma de três e cinco. (4) O quadrado do oposto de três. (5) O oposto de sete menos cinco. (6) O oposto da diferença entre sete e cinco. (7) A diferença entre o quadrado e o triplo de um número. (8) O quadrado de um número menos três, vezes o mesmo número.	(2) $(-3)^2$ (5) $-(7-5)$ (1) $(3+5)^2$ (8) x^2-3x

Logo, o número de acertos do aluno é:
(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
(2) $(-3)^2$: INCORRETA
$(-3)^2$ é o quadrado do oposto de três que, na 1ª coluna, tem o número (4). O item (2) da 1ª coluna "Menos três ao quadrado" representa -3^2.
(5) $-(7-5)$: INCORRETA
$-(7-5)$ é o oposto da diferença entre sete e cinco que, na 1ª coluna, tem o número (6). O item (5) da 1ª coluna "O oposto de sete menos cinco" representa $-7-5$.
(1) $(3+5)^2$: INCORRETA
$(3+5)^2$ é o quadrado da soma de três e cinco que, na 1ª coluna, tem o número (3). O item (1) da 1ª coluna "A soma dos quadrados de três e cinco" representa 3^2+5^2.
(8) x^2-3x: CORRETA

2) Sendo ABCD um quadrado de área S, onde $AF = \frac{1}{2}AB$ e $AE = \frac{1}{3}AB$, a área sombreada na figura é:

(A) $\frac{S}{12}$
(B) $\frac{S}{14}$
(C) $\frac{S}{18}$
(D) $\frac{11S}{70}$
(E) $\frac{31S}{420}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$EF = AF - AE = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}AB = \frac{1}{6}AB$

$\Delta EFG \sim \Delta CDG \Rightarrow \frac{FG}{DG} = \frac{EF}{CD} = \frac{1}{6} \Rightarrow DG = \frac{6}{7}DF$

$\frac{EF}{AB} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{1}{6}S_{ABD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{12}$

$\frac{DG}{DF} = \frac{6}{7} \Rightarrow S_{DEG} = \frac{6}{7} \cdot S_{DEF} = \frac{6}{7} \cdot \frac{S}{12} = \frac{S}{14}$

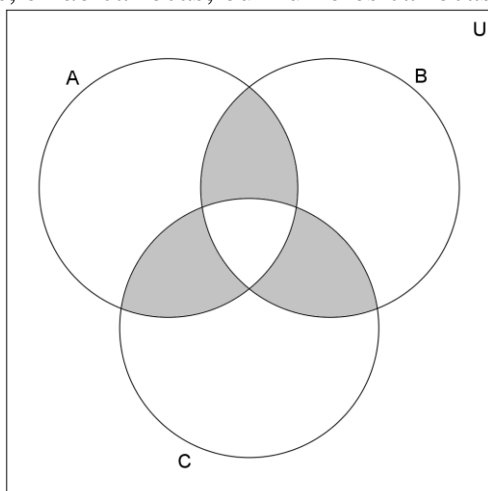
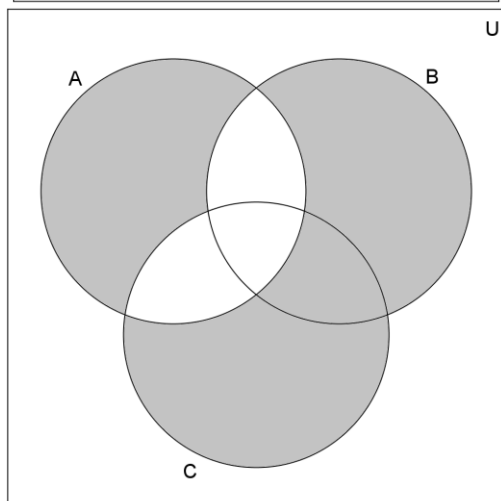
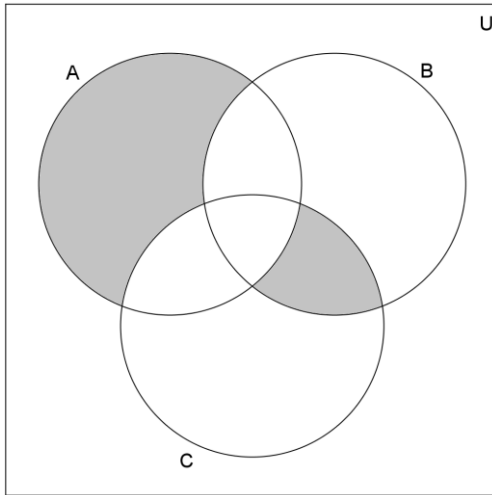
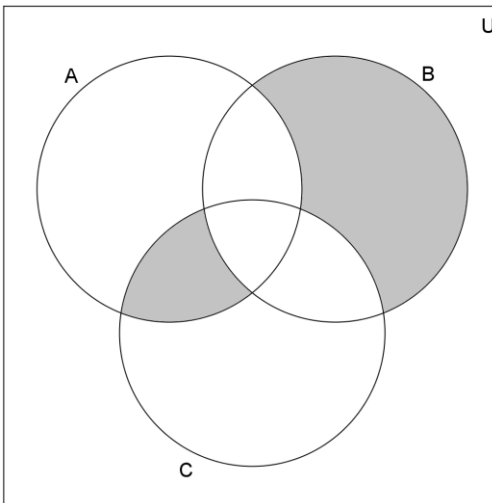
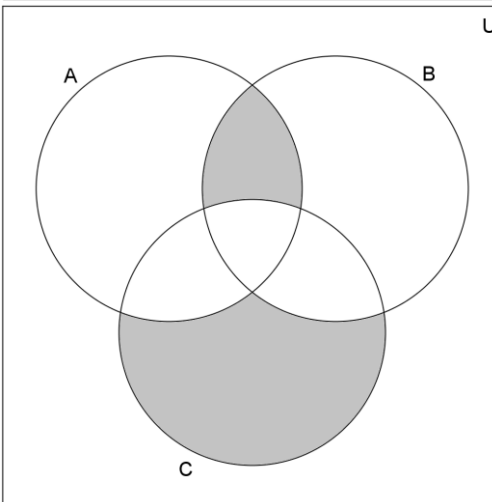
3) Sobre uma circunferência, marcam-se os n pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de tal maneira que os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 têm medidas iguais à da corda do arco de $157^\circ 30'$ dessa mesma circunferência. Logo o número $\underline{n}$ é:
(A) primo.
(B) múltiplo de 3.

(C) múltiplo de 6.
(D) potência de 2.
(E) múltiplo de 5.

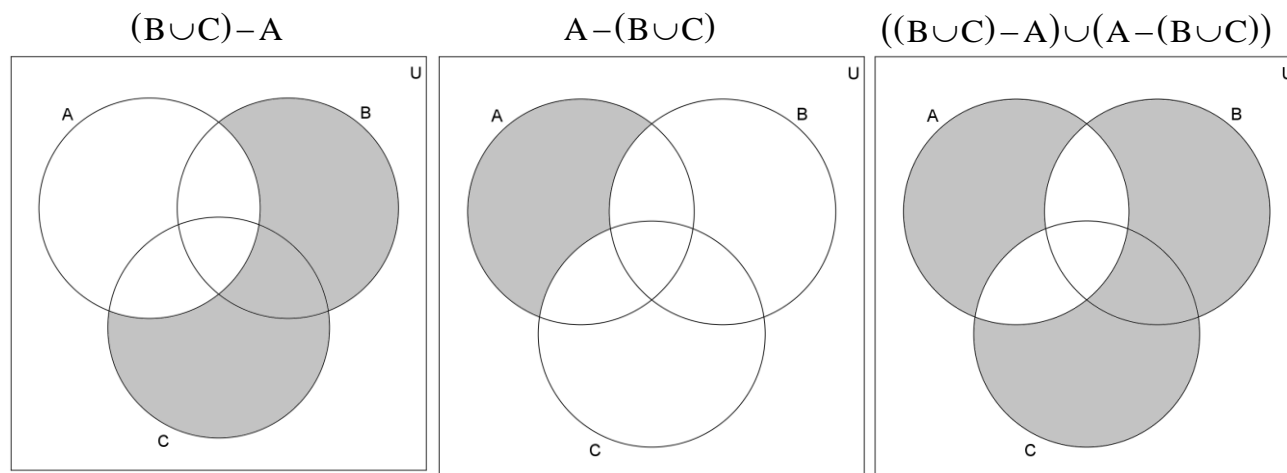
RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Como a extremidade final do último segmento coincide com a extremidade inicial do primeiro segmento, a soma dos arcos determinados por todos os segmentos deve ser um número inteiro de voltas.

Como há um total de n segmentos, a soma dos arcos é $157^\circ 30' \cdot n$. Assim, existe $k \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $157^\circ 30' \cdot n = 360^\circ \cdot k \Leftrightarrow 315^\circ \cdot n = 360^\circ \cdot k \Leftrightarrow n = \frac{8}{7} \cdot k \Rightarrow k = 7 \wedge n = 8$.

Logo, n é uma potência de 2.

4) Sejam U o conjunto das brasileiras, A o conjunto das cariocas, B o conjunto das morenas e C o conjunto das mulheres de olhos azuis. O diagrama que representa o conjunto de mulheres morenas ou de olhos azuis, e não cariocas; ou mulheres cariocas e não morenas e nem de olhos azuis é:

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
O conjunto de mulheres morenas ou de olhos azuis, e não cariocas; ou mulheres cariocas e não morenas e nem de olhos azuis é $((B \cup C) - A) \cup (A - (B \cup C))$.

$(B \cup C) - A$ $\quad A - (B \cup C)$ $\quad ((B \cup C) - A) \cup (A - (B \cup C))$

Logo, a alternativa correta é (B).

5) Um cofre é equipado com sistema automático que o destranca por um minuto e volta a trancá-lo se não for aberto. Tal sistema tem dois dispositivos independentes: um que dispara de 46 minutos em 46 minutos, após ser ligado o sistema, e o outro de 34 minutos em 34 minutos. Sabendo-se que o cofre pode ser aberto tanto por um, quanto pelo outro dispositivo, e que um não anula o outro, quantas vezes por dia, pode-se dispor do cofre para abertura, sendo o sistema ligado a zero hora?
(A) 74
(B) 73
(C) 72
(D) 71
(E) 70

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Um dia possui $24 \text{ h} = 1440 \text{ min}$, então o primeiro dispositivo dispara $\left\lfloor \frac{1440}{46} \right\rfloor = 31$ vezes por dia e o segundo dispositivo dispara $\left\lfloor \frac{1440}{34} \right\rfloor = 42$ vezes por dia.
Entretanto, os dois dispositivos disparam juntos a cada $\text{mmc}(46, 34) = 782$ minutos, então eles disparam juntos $\left\lfloor \frac{1440}{782} \right\rfloor = 1$ vez por dia.
Portanto, pode-se dispor do cofre para abertura $31 + 42 - 1 = 72$ vezes por dia.

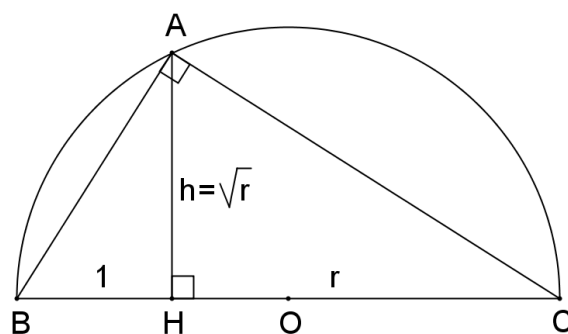
6) Um livro de 200 páginas vai ser numerado no sistema de numeração de base 8. O número na base 10 de algarismos que serão utilizados é:
(A) 520
(B) 525
(C) 530
(D) 535
(E) 540

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
$200 = (310)_8$
De 1_8 a 7_8 são escritos $(7_8 - 1_8) + 1_8 = 7_8 = 7$ números e $7 \cdot 1 = 7$ algarismos.
De 10_8 a 77_8 são escritos $(77_8 - 10_8) + 1_8 = 70_8 = 56$ números e $56 \cdot 2 = 112$ algarismos.
De 100_8 a 310_8 são escritos $(310_8 - 100_8) + 1_8 = 211_8 = 137$ números e $3 \cdot 137 = 411$ algarismos.
Portanto, o total de algarismos utilizados é $7 + 112 + 411 = 530$.

7) Para a construção com a régua e compasso do número $\sqrt{r}$, r primo, um aluno determinou a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujas projeções dos catetos sobre a hipotenusa são números
(A) primos.
(B) cujo quociente pode ser $r-1$.
(C) cuja diferença é $r-1$.
(D) múltiplo de r.
(E) cuja soma é r.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
Se construirmos um triângulo retângulo de hipotenusa $r+1$ e cujas projeções dos catetos sejam 1 e r, então a altura relativa à hipotenusa será igual a $h = \sqrt{r \cdot 1} = \sqrt{r}$.

Portanto, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa são números cuja diferença é $r-1$.

8) O valor numérico da expressão $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ para $a = \frac{8}{17}$ e $b = \frac{9}{17}$ é um número N tal que:

(A) $N < 0$
(B) $10^{-4} < N < 10^{-3}$
(C) $10^{-3} < N < 10^{-2}$
(D) $10^{-2} < N < 10^{-1}$
(E) $10^{-1} < N < 1$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$N = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 = [(a+b)(a-b)]^2 = \left[\left(\frac{8}{17}+\frac{9}{17}\right)\left(\frac{8}{17}-\frac{9}{17}\right)\right]^2 = \left[1 \cdot \left(-\frac{1}{17}\right)\right]^2 = \frac{1}{289}$$

$$\frac{1}{1000} < \frac{1}{289} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 10^{-3} < N < 10^{-2}$$

9) Num quadrilátero inscritível, um de seus ângulos é a sexta parte do seu ângulo oposto. Escrito em graus, minutos e segundos, o número da parte inteira de segundos, do referido ângulo, é:
(A) 50
(B) 51
(C) 52
(D) 53
(E) 54

RESPOSTA: B

Em qualquer quadrilátero inscritível a soma de dois ângulos opostos é 180°.
Seja α o ângulo referido, então seu ângulo oposto é igual a 6α e
$\alpha + 6\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{7} = 25^\circ 42' 51\frac{3}{7}''$.
Portanto, o número da parte inteira de segundos do referido ângulo é 51.

10) O número de soluções inteiras da equação $4x^5 + 11x^3 - 3x = 0$ é
(A) 5
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$4x^5+11x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(4x^4+11x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ 4x^4+11x^2-3=0$

A equação $4x^4+11x^2-3=0$ é uma equação biquadrada e pode ser resolvida pela substituição de variável $y=x^2$. Assim, obtemos a equação resolvente $4y^2+11y-3=0 \Leftrightarrow y=-3 \ \vee \ y=\frac{1}{4}$.

Vamos agora retornar à expressão $y=x^2$ para encontrar os valores de x correspondentes aos valores de y obtidos.

$y=x^2=-3 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

$y=x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Portanto, o conjunto solução da equação no domínio dos números inteiros é $S=\{0\}$, ou seja, a equação possui apenas uma solução inteira.

11) Para se explicitar $\underline{x}$ na equação $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, usa-se o recurso da complementação de quadrados. Usando-se o recurso da complementação de cubos um aluno determinou uma raiz real r da equação $x^3-6x^2+12x-29=0$. Pode-se afirmar que:

(A) $0<r<1$
(B) $1<r<2$
(C) $2<r<3$
(D) $3<r<4$
(E) $4<r<5$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$x^3-6x^2+12x-29=0 \Leftrightarrow x^3-3\cdot2\cdot x^2+3\cdot2^2\cdot x-2^3+2^3-29=0 \Leftrightarrow (x-2)^3=21 \Rightarrow x=\sqrt[3]{21}+2$

$\Rightarrow r=\sqrt[3]{21}+2 \Rightarrow \sqrt[3]{2^3}+2<r<\sqrt[3]{3^3}+2 \Rightarrow 4<r<5$

12) O conjunto verdade da equação $\frac{x^2-1}{2x+2}-\frac{x-1}{2}=-\frac{x+1}{2}$ em $\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais), é:

(A) $\varnothing$
(B) $\{-1\}$
(C) $\mathbb{Q}$
(D) $\{-1;\ 1\}$
(E) $\{1\}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Inicialmente devemos observar que $2x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ é uma condição de existência.
O m.m.c. dos denominadores é $2(x+1)$. Assim, temos:

$$\frac{x^2-1}{2x+2}-\frac{x-1}{2}=-\frac{x+1}{2}\Leftrightarrow x^2-1-(x-1)(x+1)=-(x+1)(x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1-(x^2-1)=-(x+1)^2\Leftrightarrow -(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1$$

Como $x\neq -1$, então o conjunto verdade da equação é $S=\varnothing$.

13) Seja M um conjunto cujos elementos são números naturais compostos por três algarismos distintos e primos absolutos. Sabe-se que o inverso de cada um deles é uma dízima periódica simples e que, invertendo-se a posição dos algarismos das centenas com os das unidades, em todos eles, os respectivos inversos são dízimas periódicas compostas. O número de subconjuntos de M é:
(A) 16
(B) 256
(C) 1024
(D) 2048
(E) maior que 3000

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Os números primos absolutos e que são algarismos na base 10 são 2, 3, 5, 7.
Sendo o número da forma $\frac{1}{(abc)}$ uma dízima periódica simples, então $\frac{1}{(cba)}$ é uma dízima periódica composta.
Como (cba) deve possuir fator 2 ou 5, então $a=2$ ou $a=5$ e como (abc) não pode possuir fator 2 ou 5, então $c\neq 2$ e $c\neq 5$.
Logo, $c\in\{3,7\}$, $a\in\{2,5\}$ e b é qualquer dos outros algarismos listados e diferentes de a e b.

$$M=\{253,273,237,257,523,573,527,537\}$$

Logo, o número de subconjuntos de M é $2^{n(M)}=2^8=256$.

NOTA 5: REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE FRAÇÕES

Número racional ou fração ordinária é o número que pode ser colocado na forma $\frac{p}{q}$, onde p (numerador) e q (denominador) são inteiros, q não é zero e $\text{m.d.c.}(p,q)=1$.

Fração decimal é a fração cujo denominador é uma potência de 10. Exemplo: $\frac{7}{10}$ e $\frac{135}{1000}$

As frações decimais podem ser escritas na notação de número decimal, de acordo com o sistema de numeração de base 10, segundo o qual um algarismo escrito à direita de outro representa unidades 10 vezes menores. Exemplo.: $\frac{7}{10}=0,7$ e $\frac{4235}{100}=42,35$

Todo número racional $\frac{p}{q}$ pode ser representado por uma fração decimal finita ou por uma fração decimal infinita periódica (dízima periódica); reciprocamente, toda fração decimal, finita ou periódica, representa um número racional.

Os números que possuem representação decimal infinita e não periódica são chamados irracionais e não podem ser escritos sob a forma de uma fração irredutível.

Dízima periódica:

Dízima periódica é um número racional que possui representação decimal infinita e periódica.

A dízima periódica, em geral, é composta de três partes: parte inteira, parte não periódica e período.

Exemplo: Na dízima periódica $1,25434343\ldots$, a parte inteira é 1, a parte não periódica é 25 e o período é 43.

Outras notações para indicar a repetição do período: $1,25434343...=1,25\overline{43}=1,25(43)$.

A dízima que não possui parte não periódica é dita **simples**, enquanto a que possui é dita **composta**.

Considerando a decomposição em fatores primos do denominador de uma fração irredutível, tem-se:

apenas fatores 2 e 5	a fração converte-se em um decimal exato	$\frac{3}{20}=\frac{3}{2^2\cdot 5}=0,15$
apenas fatores diferentes de 2 e 5	a fração converte-se em uma dízima periódica simples	$\frac{1}{33}=\frac{1}{3\cdot 11}=0,030303\ldots$
fatores 2 ou 5 com outros diferentes deles	a fração converte-se em uma dízima periódica composta	$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}=0,1666\ldots$

Geratriz de uma dízima periódica é a fração ordinária que dá origem à dízima periódica:

Obtenção da geratriz de uma dízima periódica	
Numerador	parte inteira seguida de parte não–periódica seguida do período, menos a parte inteira seguida da parte não–periódica
Denominador	número formado de tantos 9 quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos 0 quantos forem os algarismos da parte não–periódica

Exemplos:

$0,333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$0,242424... = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$

$0,1333... = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

$2,1333... = \frac{213-21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$

$1,23454545... = \frac{12345-123}{9900} = \frac{12222}{9900} = \frac{679}{550}$

****

14) O produto de todos os divisores inteiros de 144 é:

(A) $-2^{30} \times 3^{15}$

(B) $2^{30} \times 3^{15}$

(C) $-2^{60} \times 3^{30}$

(D) $2^{60} \times 3^{30}$

(E) -6^{30}

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Como $144 = 2^4 \cdot 3^2$, então o número de divisores positivos de 144 é $d(144) = (4+1) \cdot (2+1) = 15$.

O produto de todos os divisores positivos de 144 é $P(144) = 144^{\frac{d(144)}{2}} = 144^{\frac{15}{2}} = 12^{15}$.

Como a cada divisor positivo corresponde um divisor negativo de mesmo módulo e a quantidade de divisores negativos é ímpar, então o produto de todos os divisores inteiros de 144 é $-(12^{15})^2 = -12^{30} = -(2^2 \cdot 3)^{30} = -2^{60} \cdot 3^{30}$.

15) $\underline{S}$ é a área do segmento circular do ângulo de 40° de um círculo de raio 6. Logo, pode-se afirmar que:

(A) $0,4 < S < 1,5$

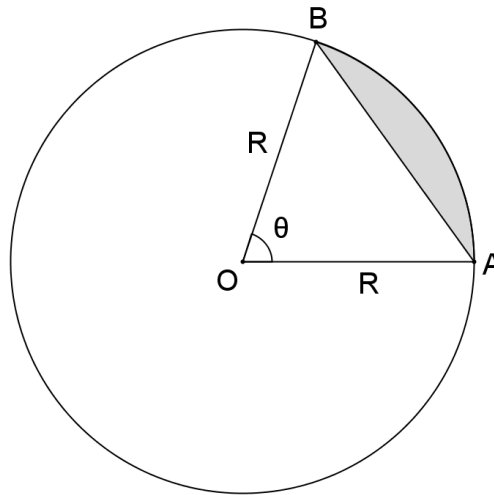
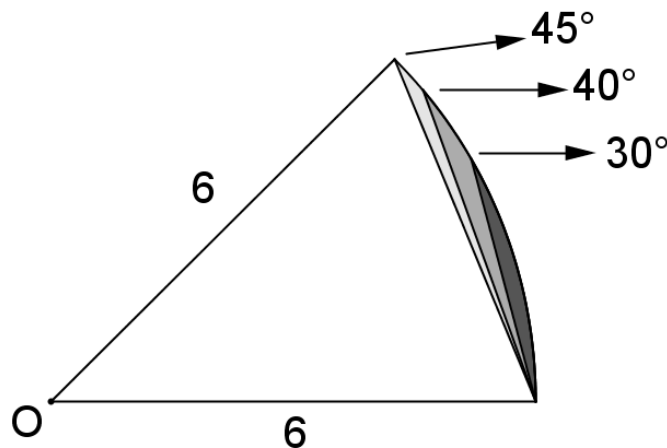
(B) $1,5 < S < 2,4$

(C) $2,4 < S < 3,5$

(D) $3,5 < S < 4,4$

(E) $4,4 < S < 5,0$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Note inicialmente que um segmento circular (área sombreada na figura a seguir) é a região determinada por uma corda em um círculo e pode ser calculado pela diferença entre a área de um setor circular ("fatia de pizza") e um triângulo.

Dessa forma, a área de um segmento circular de ângulo θ em uma circunferência de raio R é dada por $S_{\text{sgmento }\theta}=S_{\text{setor }\theta}-S_{\Delta OAB}=\pi R^2\cdot\frac{\theta}{360^\circ}-\frac{R^2}{2}\text{sen}\,\theta$, onde o ângulo θ deve ser expresso em graus.

Observe que, na figura, o segmento circular de 40° corresponde à soma das duas regiões mais escuras. A área de um segmento circular de 40° em um círculo de raio 6 é maior que a área de um segmento circular de 30° e menor que a área de um segmento circular de 45° em um círculo de mesmo raio.
Assim, temos:

$$\pi\cdot 6^2\cdot\frac{30^\circ}{360^\circ}-\frac{6\cdot 6}{2}\text{sen}\,30^\circ<S<\pi\cdot 6^2\cdot\frac{45^\circ}{360^\circ}-\frac{6\cdot 6}{2}\text{sen}\,45^\circ\Leftrightarrow 3\pi-18\cdot\frac{1}{2}<S<\frac{9\pi}{2}-18\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\pi-9<S<4,5\pi-9\sqrt{2}$$

Adotando as aproximações $\pi\approx 3,14$ e $\sqrt{2}\approx 1,41$, temos:

$$3\cdot 3,14-9<S<4,5\cdot 3,14-9\cdot 1,41\Leftrightarrow 0,42<S<1,44\Rightarrow 0,4<S<1,5.$$

16) Se r é a menor raiz da equação $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^4}=\sqrt{x^6}$, então
(A) $r<-1$
(B) $-1<r<0$
(C) $r=0$
(D) $0<r<1$
(E) $r>1$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Fazendo a substituição $y=\sqrt{x^2}$ na equação $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^4}=\sqrt{x^6}$, temos:

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{x^4}=\sqrt{x^6} \Leftrightarrow \sqrt{x^2}+\left(\sqrt{x^2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2}\right)^3 \Leftrightarrow y+y^2=y^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3-y^2-y=0 \Leftrightarrow y\cdot\left(y^2-y-1\right)=0 \Leftrightarrow y=0 \ \vee \ y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Vamos agora retornar à expressão $y=\sqrt{x^2}$ para encontrar os valores de x correspondentes aos valores de y obtidos. Notemos, entretanto, que $y=\sqrt{x^2}=|x|\geq 0$. Assim, valores negativos de y não correspondem a raízes da equação original.

$$y=|x|=0 \Leftrightarrow y=0$$

$$y=|x|=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0 \text{ (não convém)}$$

$$y=|x|=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S=\left\{0,\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Se r é a menor raiz da equação então $r=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1,6<-1$.

17) Um sistema de três equações do 1º grau com duas incógnitas é determinado. Logo um sistema formado por apenas duas dessas equações
(A) é determinado.
(B) é indeterminado.
(C) é impossível.
(D) pode ser impossível ou determinado.
(E) pode ser indeterminado ou determinado.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Se o sistema de três equações do 1º grau é possível e determinado, então as três equações podem representar três retas que concorrem em um único ponto ou duas retas coincidentes que concorrem com a terceira reta. Assim, o sistema formado por apenas duas dessas equações pode ser representado

por duas retas concorrentes, caso em que será possível e determinado, ou por duas retas coincidentes, caso em que será possível e indeterminado.

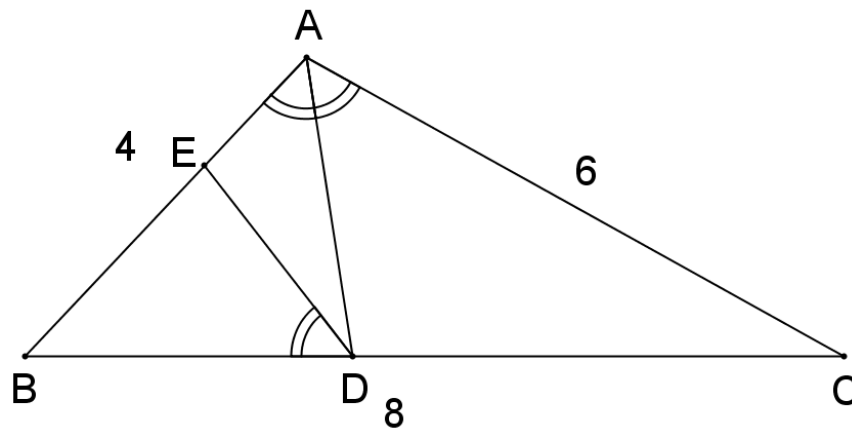
18) Se a equação $x^4 - 4(m+2)x^2 + m^2 = 0$ admite quatro raízes reais, então
(A) o maior valor inteiro de m é -3.
(B) a soma dos três menores valores inteiros de m é zero.
(C) a soma dos três maiores valores inteiros de m é -12.
(D) só existem valores inteiros e positivos para m.
(E) só existem valores negativos para m.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Se a equação biquadrada $x^4 - 4(m+2)x^2 + m^2 = 0$ admite quatro raízes reais, então a equação resolvente $y^2 - 4(m+2)y + m^2 = 0$, obtida após a substituição $y = x^2$, deve apresentar duas raízes reais e positivas. Para que isso ocorra o discriminante da equação resolvente, a soma das raízes e o produto das raízes devem ser todos não negativos ("maiores ou iguais a zero"). Dessa forma, temos:
$\Delta = [-4(m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 = 16(m^2 + 4m + 4) - 4m^2 = 8(m^2 + 8m + 8) \geq 0$
As raízes da equação $m^2 + 8m + 8 = 0$ são $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{32}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{2}$.
Portanto, $\Delta = 8(m^2 + 8m + 8) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -4 - 2\sqrt{2} \ \vee \ m \geq -4 + 2\sqrt{2}$.
A soma das raízes da resolvente é $S = \dfrac{-[-4(m+2)]}{1} = 4(m+2) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$.
O produto das raízes da resolvente é $P = \dfrac{m^2}{1} = m^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$.
Como as três condições devem ser satisfeitas simultaneamente, devemos fazer a interseção dos intervalos obtidos, que resulta $m \geq -4 + 2\sqrt{2} \approx -1,2$.
Portanto, os três menores valores inteiros de m são -1, 0 e 1, cuja soma é zero.

19) Num triângulo ABC as medidas dos lados AB, AC e BC, são respectivamente iguais a 4, 6 e 8. Da extremidade D da bissetriz AD traça-se o segmento DE, E pertencente ao lado AB, de tal forma que o triângulo BDE é semelhante ao triângulo ABD. A medida do segmento BE é igual a:
(A) $2,56$
(B) $1,64$
(C) $1,32$
(D) $1,28$
(E) 1

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

A figura acima representa a situação descrita no enunciado.

Como o ΔBDE é semelhante ao ΔABD, eles devem ter os mesmos ângulos. O ângulo $\hat{B}$ é comum aos dois triângulos e $B\hat{E}D \neq B\hat{A}D$, pois $B\hat{E}D = B\hat{A}D + A\hat{D}E$, logo devemos ter $B\hat{D}E = B\hat{A}D$.

Aplicando o teorema das bissetrizes, temos:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Leftrightarrow \frac{BD}{4} = \frac{CD}{6} = \frac{BD+CD}{4+6} = \frac{8}{4+6} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow BD = \frac{16}{5} \ \wedge \ CD = \frac{24}{5}.$$

A semelhança dos triângulos BDE e ABD com a correspondência angular determinada acima permite escrever:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BD}{AB} \Leftrightarrow BE = \frac{BD^2}{AB} = \frac{(16/5)^2}{4} = \frac{256}{100} = 2,56 \text{ unidades de comprimento.}$$

20) A eleição para o diretor de um colégio é feita por voto de qualidade dos votos válidos. Os votos dos professores valem 50%, os votos dos alunos 45% e os votos dos funcionários 5%. Apurados os votos válidos, obteve-se a seguinte tabela:

	Votaram em A	**Votaram em B**
ALUNOS	600	480
PROFESSORES	15	180
FUNCIONÁRIOS	240	40

Sabendo-se que o resultado é homologado se, e somente se, o vencedor tiver 10% mais que o oponente, pode-se concluir que:

(A) não houve vencedor
(B) o candidato A venceu por uma margem aproximada de 20% dos votos válidos.
(C) o candidato A venceu por uma margem aproximada de 30% dos votos válidos.
(D) o candidato B venceu por uma margem aproximada de 20% dos votos válidos.
(E) o candidato B venceu por uma margem aproximada de 30% dos votos válidos.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

O candidato A obteve $\frac{600}{600+480}$ dos votos dos alunos, o que vale $\frac{600}{1080}\cdot 45\% = 25\%$; obteve $\frac{15}{15+180}$ dos votos dos professores, o que vale $\frac{15}{195}\cdot 50\% = 3\frac{11}{13}\%$; e obteve $\frac{240}{240+40}$ dos votos dos funcionários, o que vale $\frac{240}{280}\cdot 5\% = 4\frac{2}{7}\%$. Logo, o candidato A obteve $25\% + 3\frac{11}{13}\% + 4\frac{2}{7}\% = 33\frac{8}{91}\%$ e o candidato B obteve $100\% - 33\frac{8}{91}\% = 66\%\frac{83}{91}\%$.

Assim, o candidato B venceu por $66\frac{83}{91}\% - 33\frac{8}{91}\% = 33\frac{75}{91}\%$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1990/1991

1) Considere a seguinte subtração, onde x, b e z são algarismos:

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 8 & 4 & x \\ - & x & 6 & 8 & 4 \\ \hline & b & x & b & z \end{array}$$

Logo, $x+b+z$ é igual a:
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Devemos analisar as diferenças lembrando que em alguns casos pode ter sido necessário “pedir emprestado”.
Na diferença $4-8$ certamente foi necessário “pedir emprestado”, mas pode ser que o 4 tenha “emprestado” 1 para a diferença $x-4$, assim temos duas possibilidades: $114-8=6=b$ ou $13-8=5=b$.
Na diferença $6-x=b$, se $b=6$, então $x=0$. Como x é um algarismo que aparece na primeira posição à esquerda, então $x \neq 0$ e consequentemente $x \neq 6$ e $b=5$.
A diferença $8-6$ fica $7-6$, pois o 8 empresta 1, assim $7-6=1=x \Leftrightarrow x=1$.
A diferença $x-4$ recebe 1 emprestado e como $x=1$ fica $11-4=7=z \Leftrightarrow z=7$.
Montando a conta para conferir os valores:

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 8 & 4 & 1 \\ - & 1 & 6 & 8 & 4 \\ \hline & 5 & 1 & 5 & 7 \end{array}$$

$\Rightarrow x+b+z=1+5+7=13$

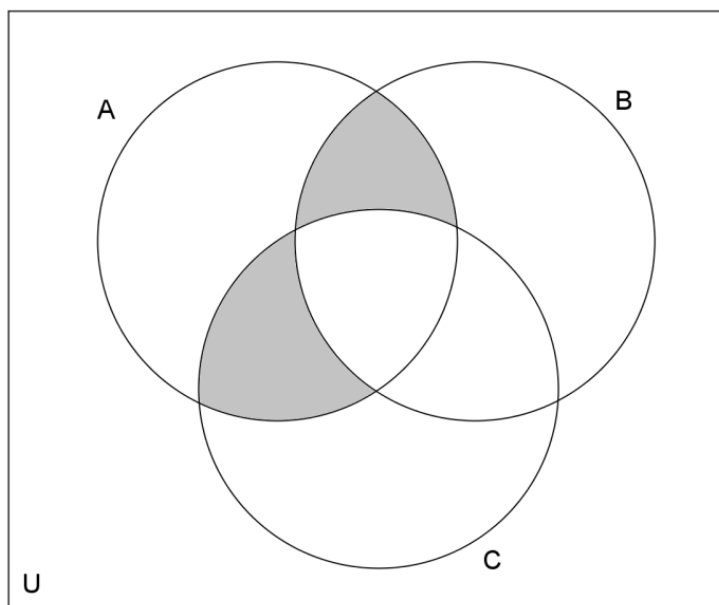
2) Uma fábrica de fósforo usa as seguintes definições:

Caixa: conjunto de 45 fósforos
Maço: conjunto com 10 caixas
Pacote: conjunto com 12 maços

Dividindo-se 13 pacotes, 5 maços, 8 caixas e 22 fósforos por 8, obtém-se um número $\underline{p}$ de pacotes, $\underline{m}$ de maços, $\underline{c}$ de caixas e $\underline{f}$ de fósforos, tais que $p+m+c+f$ é igual a:
(A) 25
(B) 26
(C) 27
(D) 28
(E) 29

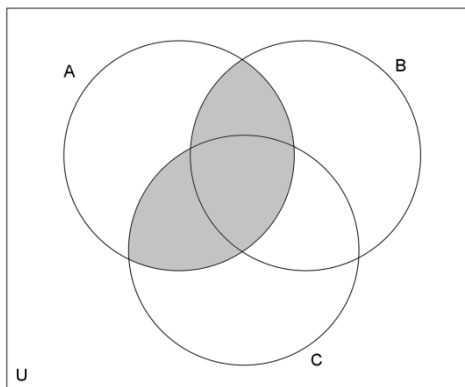
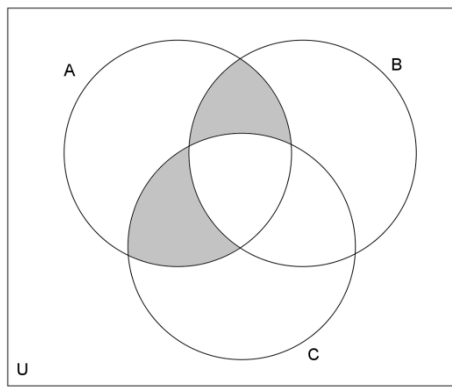
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
22 fósforos
8 caixas contêm $8 \cdot 45 = 360$ fósforos
5 maços contêm $10 \cdot 5 = 50$ caixas, que contém $50 \cdot 45 = 2250$ fósforos
13 pacotes contêm $13 \cdot 12 = 156$ maços, que contém $156 \cdot 10 = 1560$ caixas, que contêm $1560 \cdot 45 = 70200$ fósforos
Logo, o total de fósforos é $22 + 360 + 2250 + 70200 = 72832 = 8 \cdot 9104$.
Como 1 pacote contém $12 \cdot 10 \cdot 45 = 5400$ fósforos e um maço contém $10 \cdot 45 = 450$ fósforos, então o resultado da divisão dos fósforos por 8, que resulta 9104 fósforos, equivale a 1 pacote e restam $9104 - 5400 = 3704$; 8 maços e restam $3704 - 8 \cdot 450 = 104$; 2 caixas e restam $104 - 2 \cdot 43 = 14$; e 14 fósforos. Portanto, $p = 1$, $m = 8$, $c = 2$, $f = 14$, e $p + m + c + f = 1 + 8 + 2 + 14 = 25$.

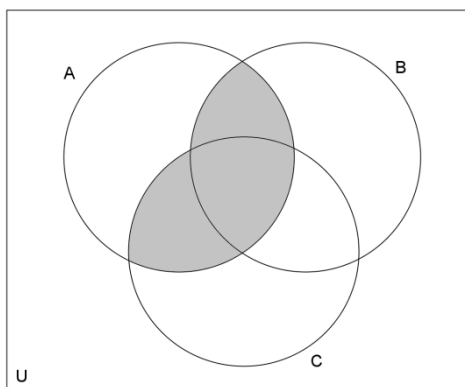
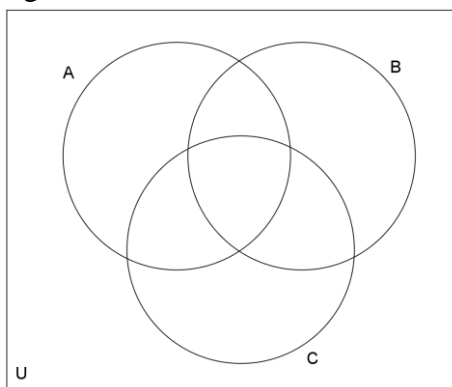
3) Considere os diagramas onde A, B, C e U são conjuntos. A região sombreada pode ser representada por:

(A) $(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cap C)$
(B) $(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cup C)$
(C) $(A \cup B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(D) $(A \cup B) - (A \cup C) \cap (B \cap C)$
(E) $(A - B) \cap (A - C) \cap (B - C)$

RESPOSTA: A

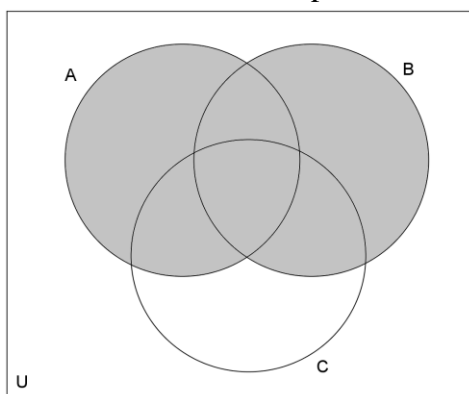
RESOLUÇÃO:

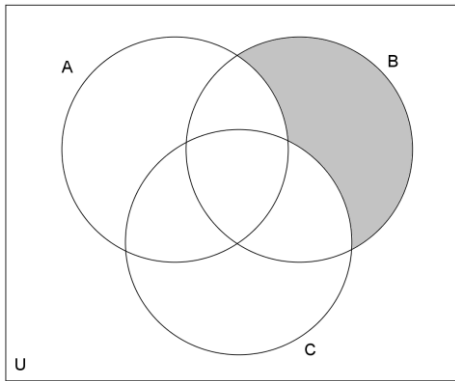
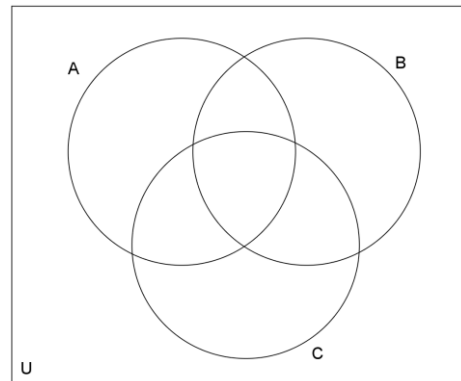
(A) $(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cap C)$: corresponde ao diagrama do enunciado.

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cap C)$

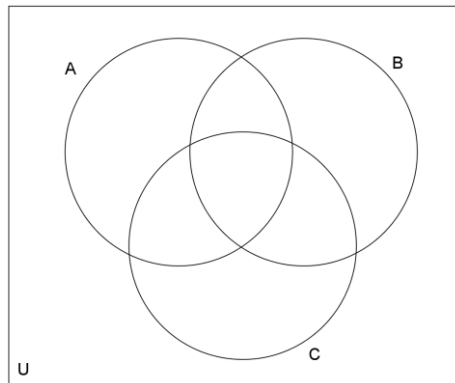
(B) $(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cup C)$: NÃO corresponde ao diagrama do enunciado.

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cup C)$

(C) $(A \cup B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup B$: NÃO corresponde ao diagrama do enunciado.

$(A \cup B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(D) $(A \cup B) - (A \cup C) \cap (B \cap C)$: NÃO corresponde ao diagrama do enunciado.

$(A \cup B) - (A \cup C)$

$(A \cup B) - (A \cup C) \cap (B \cap C)$

(E) $(A - B) \cap (A - C) \cap (B - C) = \varnothing$: NÃO corresponde ao diagrama do enunciado.

$(A - B) \cap (A - C) \cap (B - C)$

4) Considere as afirmativas:
I − O número 1147 não é primo.
II − Todo o número da forma $abba$, onde a e b são algarismos, é divisível por 11.
III − Todo número múltiplo de 5 e 15 é múltiplo de 75.
IV − O número de divisores naturais de 576 é divisor de 63.
O número de afirmativas verdadeiras é
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
I − VERDADEIRA
$\sqrt{33^2} = \sqrt{1089} < \sqrt{1147} < \sqrt{1156} = \sqrt{34^2}$
Devemos verificar se 1147 é divisível por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31. Nesse teste, encontramos $1147 = 31 \cdot 37$ e, portanto, não é primo.

II − VERDADEIRA

$\text{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \cdot 91a + 11 \cdot 10b = 11 \cdot (91a + 10b)$

Esse teste poderia ser feito também usando o critério de divisibilidade por 11. O resto da divisão por 11 é a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos algarismos de ordem par, ou seja, $(b+a)-(b+a)=0$. Logo, o número é múltiplo de 11.

III – FALSA

Todo número múltiplo de 5 e 15 é múltiplo é múltiplo do $\text{mmc}(5,15)=15$, ou seja, não se pode garantir que sejam múltiplos de 75. Um contra exemplo é o próprio 15, que é múltiplo de 5 e 15, mas não é múltiplo de 75.

IV − VERDADEIRA

Como $576 = 2^6 \cdot 3^2$, o seu número de divisores naturais é $d(576) = (6+1) \cdot (2+1) = 21$ que é um divisor de 63.

5) A expressão $\dfrac{(0,5)^{-2} \cdot 2^{0,333...} \cdot \sqrt[3]{16}}{(0,125)^{-3}}$ escrita como potência de base 2, tem como expoente:

(A) $-\dfrac{14}{3}$

(B) $-\dfrac{16}{3}$

(C) -6

(D) $-\dfrac{22}{3}$

(E) -8

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(0,5)^{-2} \cdot 2^{0,333...} \cdot \sqrt[3]{16}}{(0,125)^{-3}} = \frac{(2^{-1})^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^4}}{(2^{-3})^{-3}} = \frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^9} = \frac{2^{\frac{11}{3}}}{2^9} = 2^{-\frac{16}{3}}$$

6) O conjunto P é formado por três elementos respectivamente proporcionais a 2, 3 e 7. Sabendo que o menor mais o triplo do maior menos o dobro do outro é igual a 34, a soma destes três elementos é igual a:

(A) 20
(B) 21
(C) 22
(D) 23
(E) 24

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja $P=\{x,y,z\}$ tais que $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{7}=k \Leftrightarrow x=2k;\ y=3k$ e $z=7k$.

Supondo $k>0$, temos $x<y<z$, o que implica

$x+3z-2y=34 \Leftrightarrow 2k+3\cdot(7k)-2\cdot(3k)=34 \Leftrightarrow 17k=34 \Leftrightarrow k=2$

Portanto, a soma dos três elementos é $x+y+z=2k+3k+7k=12k=12\cdot 2=24$.

7) Uma aplicação do mercado financeiro, que rende 0,3% ao dia, exige um mínimo de $R\$\,50.000,00$ para ser efetuada. Uma pessoa que dispõe de $R\$\,45.000,00$, toma $R\$\,5.000,00$ a taxa de 1% ao dia, para fazer tal aplicação. Durante quantos dias, no mínimo, deverá aplicar para pagar o empréstimo e continuar aplicando? (Observação: Considerar os juros simples.)

(A) 40
(B) 43
(C) 45
(D) 47
(E) 50

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Para que a pessoa possa pagar o empréstimo e continuar aplicando, os juros obtidos na aplicação dos $R\$\,50.000,00$ devem ser suficientes para quitar o montante da dívida proveniente do empréstimo dos $R\$\,5.000,00$.

Seja d o número de dias para os quais isso ocorre, então

$50000\cdot\frac{0,3}{100}\cdot d=5000\cdot\left(1+\frac{1}{100}\cdot d\right) \Leftrightarrow 150d=5000+50d \Leftrightarrow d=50$.

Logo, a pessoa deverá aplicar durante pelo menos 50 dias.

NOTA 6: JUROS SIMPLES

Chamam-se juros simples a remuneração recebida pela aplicação de um determinado capital proporcional ao capital, à taxa e ao tempo de aplicação.

Assim, a aplicação de um capital inicial C a uma taxa de $i\%$ durante o tempo t resulta em uma remuneração de juros simples J dada por

$$J=C\cdot i\%\cdot t$$

Note que na expressão anterior, o tempo t deve ser expresso na mesma unidade a que estiver referenciada a taxa de juros $i\%$. Dessa forma, se a taxa de juros for ao ano, o tempo deve ser expresso em anos, já se a taxa de juros for ao mês, o tempo deverá estar em meses.

O montante M é o valor resgatado ao final da aplicação do capital inicial C. Assim, temos:

$$M = C + J$$

$$M = C(1 + i\% \cdot t)$$

Observação: Para o cálculo de juros, <u>normalmente</u> é usado o **ano comercial de 360 dias**, no qual os meses são sempre considerados com 30 dias.

Exemplo 1: Se R$ 3.000,00 foram aplicados por 5 meses à taxa de juros simples de 4% ao mês, determine os juros recebidos e o montante.

$$J = C \cdot i\% \cdot t = 3000 \cdot 4\% \cdot 5 = 3000 \cdot \frac{4}{100} \cdot 5 = 600,00$$
$$M = C + J = 3000 + 600 = 3600,00$$

Exemplo 2: Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado por 7 meses a uma taxa anual de juros simples de 24%. Qual o montante dessa aplicação?
Como o tempo está em meses e a taxa de juros ao ano, deve-se transformar um dos dois para a unidade do outro.

$$24\% \text{ a.a.} = \frac{24\%}{12} \text{ a.m.} = 2\% \text{ a.m.}$$
$$M = C \cdot (1 + i\% \cdot t) = 2000 \cdot (1 + 2\% \cdot 7) = 2000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 7) = 2000 \cdot 1,14 = 2280,00$$

Exemplo 3: Um capital de R$ 5.000,00 foi aplicado por 20 dias a juros simples a 9% ao mês. Qual o montante da aplicação?

$$20 \text{ dias} = \frac{20}{30} \text{ mês} = \frac{2}{3} \text{ mês}$$
$$M = C \cdot (1 + i\% \cdot t) = 5000 \cdot \left(1 + 9\% \cdot \frac{2}{3}\right) = 5000 \cdot \left(1 + 0,09 \cdot \frac{2}{3}\right) = 5000 \cdot 1,06 = 5300,00$$

Exemplo 4: O capital de R$ 500,00 aplicado durante um ano e meio a juros simples rendeu R$ 180,00. Qual a taxa mensal?

$$t = 1,5 \text{ ano} = 18 \text{ meses}$$
$$J = C \cdot i\% \cdot t \Leftrightarrow 180 = 500 \cdot i\% \cdot 18 \Leftrightarrow i\% = \frac{180}{500 \cdot 18} = \frac{2}{100} = 2\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 5: A aplicação de R$ 3.000,00 a juros simples de taxa mensal igual a 6% gerou montante igual a R$ 3.420,00. Determine o prazo da aplicação.

$$M = C \cdot (1 + i\% \cdot t) \Leftrightarrow 3420 = 3000 \cdot (1 + 6\% \cdot t) \Leftrightarrow 1 + 0,06t = 1,14$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{0,14}{0,06} = \frac{7}{3} \text{ meses} = \frac{7}{3} \cdot 30 \text{ dias} = 70 \text{ dias}$$

****

8) O conjunto solução da equação $x-\sqrt{x+4}=2$, é:
(A) Unitário de elemento par.
(B) Unitário de elemento ímpar e primo.
(C) Unitário de elemento ímpar não primo.
(D) Binário.
(E) Vazio.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Condição de existência: $x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -4$

$$x-\sqrt{x+4}=2 \Leftrightarrow x-2=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{x+4}\right)^2 \ \wedge \ x-2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4=x+4 \ \wedge \ x\geq 2 \Leftrightarrow x^2-5x=0 \ \wedge \ x\geq 2$$
$$\Leftrightarrow (x=0 \ \vee \ x=5) \ \wedge \ x\geq 2 \Leftrightarrow x=5 \Leftrightarrow S=\{5\}$$

Logo, o conjunto solução da equação é unitário de elemento ímpar e primo.

9) A soma dos valores de y que pertencem ao conjunto solução do sistema $\begin{cases} xy^2-x^2=8x \\ y+2x=5 \end{cases}$ é

(A) $-\frac{1}{2}$
(B) $\frac{13}{2}$
(C) $\frac{23}{2}$
(D) $\frac{9}{2}$
(E) Infinita

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
$$\begin{cases} xy^2-x^2=8x \\ y+2x=5 \Leftrightarrow y=5-2x \end{cases}$$
$$xy^2-x^2=8x \Rightarrow x\cdot(5-2x)^2-x^2=8x \Leftrightarrow x\cdot\left(25-20x+4x^2\right)-x^2=8x$$
$$\Leftrightarrow 4x^3-21x^2+17x=0 \Leftrightarrow x\cdot(4x-17)\cdot(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=1 \ \vee \ x=\frac{17}{4}$$

Assim, temos:
$x=0 \Leftrightarrow y=5-2\cdot 0=5$;
$x=1 \Leftrightarrow y=5-2\cdot 1=3$;
$x=\frac{17}{4} \Leftrightarrow y=5-2\cdot\frac{17}{4}=-\frac{7}{2}$.

Portanto, a soma dos valores de y que pertencem ao conjunto solução do sistema é $5+3+\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{9}{2}$.

10) O resultado mais simples para a expressão $\sqrt[4]{\left(\sqrt{48}+7\right)^2}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{48}-7\right)^2}$ é:

(A) $2\sqrt{3}$

(B) $4\sqrt[4]{3}$

(C) 4

(D) $2\sqrt{7}$

(E) $\sqrt{4\sqrt{3}+7}+\sqrt{4\sqrt{3}-7}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$y=\sqrt[4]{\left(\sqrt{48}+7\right)^2}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{48}-7\right)^2}=\sqrt{\left|\sqrt{48}+7\right|}+\sqrt{\left|\sqrt{48}-7\right|}=\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}$$

No radical duplo, temos: $C^2=7^2-48=1\Leftrightarrow C=1$, então $\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}}=2+\sqrt{3}$ e

$\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}-\sqrt{\frac{7-1}{2}}=2-\sqrt{3}$.

Portanto, $y=\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$.

Outra forma de simplificar o radical duplo é observar que

$$y=\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$$

11) O conjunto verdade da inequação $\frac{1}{x^2-x}\le\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ é:

(A) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<0 \text{ ou } x>1\}$

(B) $\{x\in\mathbb{R}^*\mid x\ne 1 \text{ e } x\ne 2\}$

(C) $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$

(D) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>2\}$

(E) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>0, x\ne 1 \text{ e } x\ne 2\}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\frac{1}{x^2-x} \le \frac{x-2}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{x(x-1)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \ge 0 \wedge x \ne 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x-1)} \ge 0 \wedge x \ne 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ge 0 \wedge x \ne 1 \wedge x \ne 2 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \ne 1 \wedge x \ne 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x \ne 1 \text{ e } x \ne 2\}$$

12) Sendo m e n as raízes da equação $x^2 - 10x + 1 = 0$, o valor da expressão $\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3}$ é:

(A) 970
(B) 950
(C) 920
(D) 900
(E) 870

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$x^2 - 10x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m + n = 10 \\ mn = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} = \frac{m^3 + n^3}{m^3 n^3} = \frac{(m+n)^3 - 3ab(a+b)}{(mn)^3} = \frac{10^3 - 3 \cdot 1 \cdot 10}{1^3} = 970$$

Esse problema pode ser resolvido também usando a fórmula de Newton:

$$S_k = m^k + n^k \Rightarrow S_0 = m^0 + n^0 = 2 \text{ e } S_1 = m^1 + n^1 = 10$$

$$\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} = S_{-3}$$

$$1 \cdot S_n - 10 \cdot S_{n-1} + 1 \cdot S_{n-2} = 0 \Leftrightarrow S_{n-2} = 10 \cdot S_{n-1} - S_n$$

$$n = 1 \Leftrightarrow S_{-1} = 10 \cdot S_0 - S_1 = 10 \cdot 2 - 10 = 10$$

$$n = 0 \Leftrightarrow S_{-2} = 10 \cdot S_{-1} - S_0 = 10 \cdot 10 - 2 = 98$$

$$n = -1 \Leftrightarrow S_{-3} = 10 \cdot S_{-2} - S_{-1} = 10 \cdot 98 - 10 = 970$$

13) Um aluno encontrou zero para o valor numérico da expressão $x^2 + y^2 - 2x + 5 + 4y$. Pode-se concluir que os valores pelos quais substituiu as variáveis x e y são tais que sua soma é:
(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$x^2+y^2-2x+5+4y=0 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=0$

$\Leftrightarrow x=1 \wedge y=-2 \Rightarrow x+y=1+(-2)=-1$

14) Um polígono regular admite para medida de suas diagonais apenas os números $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{27}$ tais que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{27}$. Logo este polígono

(A) tem 30 lados.
(B) pode ter 54 lados.
(C) pode ter 57 lados.
(D) pode ter 58 lados.
(E) tem um número de lados maior que 60.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Cada diagonal de um polígono regular de gênero n é uma corda que determina um arco de $\frac{360^\circ}{n}\cdot k$, $k \neq 1$, e quando esse arco fica maior que 180°, a diagonal tem a mesma medida que a do arco replementar já computado. Logo, $k \in \left\{2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$.

Assim, a quantidade de medidas distintas das diagonais de um polígono regular de gênero n é $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.

No caso do enunciado, há 27 medidas distintas para as diagonais, então $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 = 27 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 28 \Leftrightarrow n = 56 \vee n = 57$.

Logo, esse polígono pode ter 56 ou 57 lados.

15) Sejam r_1, r_2 e d, respectivamente, os raios e a distância entre os centros de duas circunferências exteriores C_1 e C_2. Se $d = x^2+4$, $r_1 = 2x-3$ e $r_2 = x+2$, logo o conjunto de todos os valores de x é:

(A) 0
(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$
(C) $\mathbb{R}$
(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
(E) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{3}{2}\right\}$

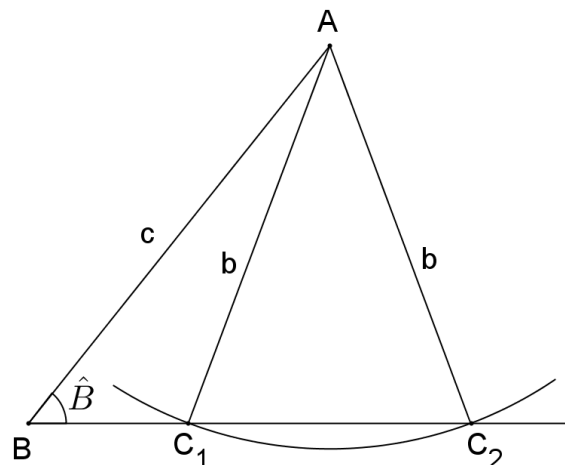
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Se as circunferências são exteriores as distâncias entre seus centros é maior que a soma dos raios. Assim, temos:
$d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow x^2 + 4 > (2x-3) + (x+2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 > 0$.

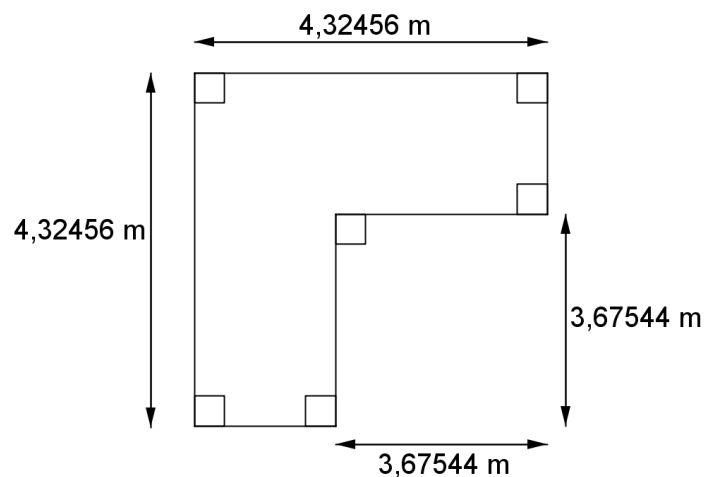
Como $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$, o trinômio do 2° grau assume valores positivos para todo x real. Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \mathbb{R}$.

16) Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ onde os lados AB e AC são, respectivamente, congruentes aos lados $A'B'$ e $A'C'$. Sabendo que os ângulos internos B e B' possuem a mesma medida, considere as seguintes afirmativas:
(I) Os triângulos ABC e $A'B'C'$ possuem o mesmo perímetro.
(II) Os triângulos ABC e $A'B'C'$ possuem a mesma área.
(III) Os ângulos C e C' podem ser suplementares.
Logo, pode-se afirmar que:
(A) Apenas I é verdadeira.
(B) Apenas II é verdadeira.
(C) Apenas III é verdadeira.
(D) Apenas I e II são verdadeiras.
(E) I, II e III são verdadeiras.

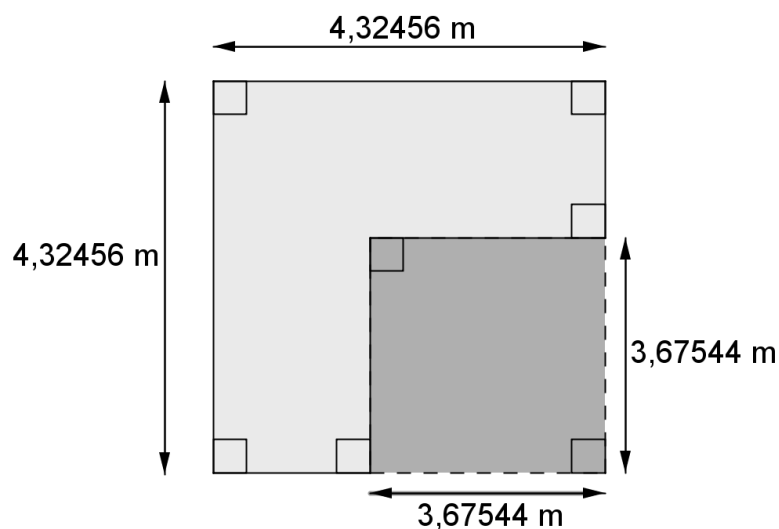
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Os dois triângulos possuem dois lados, respectivamente, congruentes e um ângulo congruente que não está entre os dois lados. Essa situação não configura um dos casos de congruência de triângulos.
Observe a construção a seguir na qual os triângulos ABC_1 e ABC_2 satisfazem as condições do enunciado, mas não são congruentes.

A figura acima constitui um contra exemplo para as afirmações (I) e (II), e mostra que a situação descrita em (III) é possível.
Para confirmar isso, vamos aplicar a lei dos senos aos triângulos ABC e $A'B'C'$:
$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow \text{sen}\hat{C} = \frac{\overline{AB} \cdot \text{sen}\hat{B}}{\overline{AC}}$ e $\frac{\overline{A'B'}}{\text{sen}\hat{C}'} = \frac{\overline{A'C'}}{\text{sen}\hat{B}'} \Leftrightarrow \text{sen}\hat{C}' = \frac{\overline{A'B'} \cdot \text{sen}\hat{B}'}{\overline{A'C'}}$.

Como $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então $\text{sen}\,\hat{C} = \text{sen}\,\hat{C}' \Leftrightarrow \hat{C} = \hat{C}' \vee \hat{C} = 180^\circ - \hat{C}'$.
Portanto, temos:
(I) FALSA
(II) FALSA
(III) VERDAADEIRA

17) Qual a área do terreno da figura abaixo?

(A) $5{,}19296 \text{ m}^2$
(B) $5{,}28386 \text{ m}^2$
(C) $5{,}29176\text{m}^2$
(D) $5{,}31266\text{m}^2$
(E) $5{,}38756\text{m}^2$

RESPOSTA: A

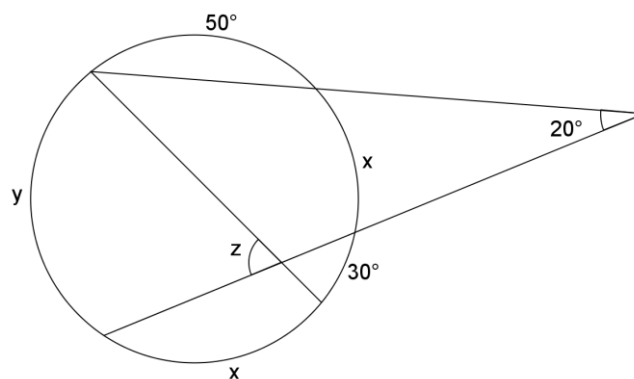
RESOLUÇÃO:
A área do terreno da figura é a diferença entre a área de dois quadrados.

Fazendo $a = 4,32456\text{ m}$ e $b = 3,67544\text{ m}$, a área do terreno da figura pode ser expressa por:
$S = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (4,32456 + 3,67544)(4,32456 - 3,67544) = 8 \cdot 0,64912 = 5,19296\text{ m}^2$.

18) O perímetro do heptágono regular convexo, inscrito num círculo de raio $2,5$, é um número $x \in \mathbb{R}$ tal que
(A) $14 < x < 15$
(B) $15 < x < 16$
(C) $16 < x < 17$
(D) $17 < x < 18$
(E) $18 < x < 19$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Considerando que o perímetro do heptágono regular convexo é maior que o do hexágono regular convexo inscrito na mesma circunferência e menor que o perímetro dessa circunferência, temos:
$2p_{HEX} = 6 \cdot l_6 = 6 \cdot R < 2p_{HEP} < 2\pi R = 2p_{CIRC} \Leftrightarrow 6 \cdot 2,5 < 2p_{HEP} < 2\pi \cdot 2,5 \Rightarrow 15 < 2p_{HEP} < 16$.

19) Considere a figura, onde x e y são medidas angulares de arcos e z é a medida de ângulo assinalado. Pode-se afirmar que $x + y + z$ é igual a:

(A) 255º
(B) 265º
(C) 275º
(D) 285º
(E) 295º

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 2x+y+30^\circ+50^\circ=360^\circ \\ \dfrac{y-x}{2}=20^\circ \\ \dfrac{y+30^\circ}{2}=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=280^\circ \\ y-x=40^\circ \\ 2z-y=30^\circ \end{cases}$$

$(2x+y)+2\cdot(y-x)=280^\circ+2\cdot 40^\circ \Leftrightarrow 3y=360^\circ \Leftrightarrow y=120^\circ$

$x=y-40^\circ=120^\circ-40^\circ \Leftrightarrow x=80^\circ$

$2z=y+30^\circ=120^\circ+30^\circ=150^\circ \Leftrightarrow z=75^\circ$

$\Rightarrow x+y+z=80^\circ+120^\circ+75^\circ=275^\circ$

20) Num triângulo retângulo ABC de catetos $AB=8$ e $AC=6$, a mediana AM intercepta a bissetriz BD no ponto E. A área do triângulo BME é expressa pelo número real x, tal que:

(A) $3,5 \le x \le 4,0$

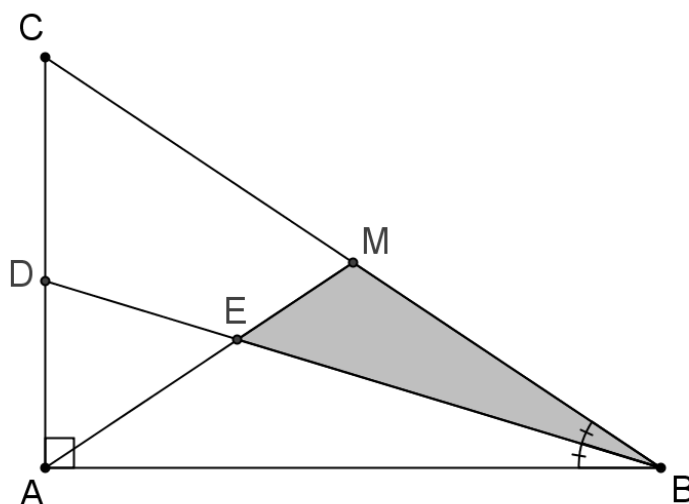
(B) $4,0 < x \le 4,5$

(C) $4,5 < x \le 5,0$

(D) $5,0 < x \le 5,5$

(E) $5,5 < x \le 6,5$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Teorema de Pitágoras no ΔABC: $BC^2=8^2+6^2 \Leftrightarrow BC=10$

$\Rightarrow AM=BM=CM=5$

Teorema das Bissetrizes no ΔABM: $\dfrac{ME}{5}=\dfrac{AE}{8}=k \Leftrightarrow ME=5k$ e $AE=8k$

$$S_{ABM}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\cdot 6}{2}=12$$

$$\frac{S_{BME}}{S_{ABM}}=\frac{ME}{AM}=\frac{5k}{13k}\Rightarrow S_{BME}=\frac{5}{13}S_{ABM}=\frac{5}{13}\cdot 12=\frac{60}{13}\text{ u.a.}$$

$$x=\frac{60}{13}\Rightarrow 4,5=\frac{58,5}{13}<x<\frac{65}{13}=5$$

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!

Volumes já lançados:

Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016